LICATIONS DE L'INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MÉMOIRES ET CONFÉRENCES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS,
LA STATISTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, L'ÉCONOMÉTRIE

Philippe SENTIS

LES RÉPARTITIONS EN CLASSES ET QUELQUES UNES DE LEURS APPLICATIONS

A. FUCHS

UN PROBLÈME DE TEMPS D'ATTEINTE

VOL VII - FASCICULE 2 - 1958

PARIS
11, Rue Pierre-Curie

LICATIONS DE L'INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MÉMOIRES ET CONFÉRENCES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS,
LA STATISTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, L'ÉCONOMÉTRIE

Philippe SENTIS

LES RÉPARTITIONS EN CLASSES ET QUELQUES UNES DE LEURS APPLICATIONS

A. FUCHS

UN PROBLÈME DE TEMPS D'ATTEINTE

VOL. VII - FASCICULE 2 - 1958

PARIS
11, Rue Pierre-Curie

Toute la correspondance relative aux publications
doit être envoyée à l'adresse
INSTITUT DE STATISTIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
Institut Henri Poincaré - 11, Rue Pierre Curie - Paris (5e)

Les manuscrits doivent être envoyés à M. Daniel DUGUE
à l'adresse précédente.

LES RÉPARTITIONS EN CLASSES ET QUELQUES UNES DE LEURS APPLICATIONS

par

M. Philippe SENTIS

(Suite)



CHAPITRE IV

FONCTIONNELLES Π – MULTIPLICATIVES

FONCTIONNELLES Π - MULTIPLICATIVES -

Nous dirons qu'une fonctionnelle φ est multiplicative si φ prend ses valeurs sur un groupe multiplicatif et si $\varphi(A \cup B) = \varphi(A)\varphi(B)$ pour $A \cap B = \emptyset$. Nous dirons qu'une fonctionnelle est Π -multiplicative si :

$$\varphi\left(\bigcup_1^{+\infty} A_i\right) = \prod_1^{+\infty} \varphi(A_i)$$

Nous supposerons désormais que nous connaissons une norme pour les éléments de F satisfaisant :

1/ - à $|k(A) - k(B)| \leqslant k(A \cup B) \leqslant k(A) + k(B)$

quels que soient $A \in F$ $B \in F$.

2/ - Si le produit $\sum_1^{+\infty} k(A_i)$ est convergent le produit $\prod_1^{+\infty}(A_i)$ est associativement et commutativement convergent quels que soient les $A_i \in F$.

La définition d'une fonctionnelle Π-multiplicative se fait de la même manière que celle d'une fonctionnelle σ-additive, les conditions à remplir devenant :

1/ - $h_n \leqslant H$ quel que soit n,

2/ - Pour toute suite M_n d'ensembles qui convergent vers $\emptyset$ on a $\varphi(M_n) \longrightarrow E$, E étant un élément neutre du groupe multiplicatif.

Applications :

1/ - E est un ensemble de réels positifs. F est l'ensemble des réels positifs, la norme étant définie par :

$$h(x) = \big|\, \mathrm{Log}\, |x| \,\big|$$

M est la classe : $a < t \leqslant b$

$$\varphi(M) = f^{-1}(a)\, f(b)$$

f est une fonction telle que $\sum | \text{Log } f^{-1}(a_i) f(a_{i+1}) |$ est borné quels q
soient les a_i.

Il sera nécessaire et suffisant que f soit le quotient de deux fon
tions monotones, positives, bornées.

2/ - E est un ensemble ordonné. F est l'ensemble des matric
carrées X d'ordre n :

$$k(X) = | \text{Log } (1 + n \sup_{ij} | a_{ij} - \delta_{ij} |) |$$

a_{ij} étant l'élément générateur de la matrice et δ_{ij} celui de la matri
unité d'ordre n; k est bien une norme.
En effet, si l'on pose : $\eta = \sup | a_{ij} - \delta_{ij} |$
on a :

$$-\eta \leqslant a_{ij} \leqslant \eta \qquad \text{pour } i \neq j$$

$$1 - \eta \leqslant a_{ii} \leqslant 1 + \eta$$

Si nous considérons le produit de deux matrices d'éléments g
nérateurs de a_{ij} b_{jk} pour lesquels on a défini η_1 et η_2 l' élément gén
rateur de la matrice produit $c_{ik} = \sum a_{ij} b_{jk}$ satisfait aux relations :

$$c_{ik} = \sum_{i \neq j \neq k} a_{ij} b_{jk} + a_{ii} b_{ik} + a_{ik} b_{kk} \qquad \text{pour } i \neq k$$

$$|c_{ik}| \leqslant (n-2)\eta_1\eta_2 + (1+\eta_1)\eta_2 + (1+\eta_2)\eta_1$$

$$\leqslant \eta_1 + \eta_2 + n\eta_1\eta_2$$

$$c_{ii} = \sum_{i \neq j} a_{ij} b_{ji} + a_{ii} b_{ii} . \qquad \text{D'où}$$

$$-(n-1)\eta_1\eta_2 + (1-\eta_1)(1-\eta_2) \leqslant c_{ii} \leqslant (n-1)\eta_1\eta_2 + (1+\eta_1)(1+\eta_2)$$

Donc : $|c_{ii} - 1| \leqslant \eta_1 + \eta_2 + n\eta_1\eta_2$

Compte tenu de la relation analogue obtenue pour c_{ik} et de la définiti
de η_3, il vient :

$$\eta_3 \leqslant \eta_1 + \eta_2 + n\eta_1\eta_2$$

Si nous revenons aux normes correspondantes, il vient :

$$k_3 = \text{Log } (1 + n\eta_3)$$

$$\leqslant \text{Log } (1 + n\eta_1 + n\eta_2 + n^2\eta_1\eta_2)$$

$$\leqslant \text{Log } (1 + n\eta_1) + \text{Log } (1 + n\eta_2) = k_1 + k_2$$

De plus, si k tend vers zéro : $\eta \longrightarrow 0 \qquad a_{ij} \longrightarrow \delta_{ij}$

Si $\sum_q^p k(z_q)$ est borné, $k\left(\prod_1^p z_q\right)$ l'est également et $\eta(\prod_{qz})$ l'est aussi

Si nous désignons par $a_{ij}^{(p)}$ le terme général de $\prod_1^p z_q$ nous avon

$$\left| a_{ij}^{(p)} \right| \leqslant 1 + \eta \prod_{1}^{p} z_q$$
$$\leqslant 1 + H$$

Les suites $a_{ij}^{(p)}$ sont donc bornées. Comme z_q tend vers I si l'on désigne par $a_{ij}^{(q)}$ le terme général de z_q on a :

$$a_{ij}^{(p+1)} = \sum a_{ik}^{(p)} \; a_{kj}^{(q)}$$

$a_{kj}^{(q)}$ tend vers zéro pour $k \neq j$

$a_{jj}^{(q)}$ tend vers 1.

Donc :

$a_{ij}^{(p+1)} - a_{ij}^{(p)} \leqslant n H \eta_q$ tend vers zéro. La suite $a_{ij}^{(p)}$ est donc convergente.

Comme $\sum \left| a_{ij}^{(p+1)} - a_{ij}^{(p)} \right| \leqslant n H \sum \eta_q$ est également convergente la série est absolument et par suite commutativement et associativement convergente. Nous allons montrer par un exemple qu'il est possible de trouver dans ces conditions une fonctionnelle φ matricielle satisfaisant aux conditions de la théorie générale.

Soit sur $0 < x \leqslant 1$ la fonctionnelle dont la valeur pour $t < x \leqslant t'$ est :

$$A(t, t') = \begin{vmatrix} \cos(t - t') & \sin(t - t') \\ -\sin(t - t') & \cos(t - t') \end{vmatrix}$$

On a : $A(tt')\, A(t't'') = A(tt'')$

$\eta < |t - t'|$ $\quad k < 2\,|t - t'|$ $\quad H < 2$

quand $|t' - t| \longrightarrow 0$ $\quad k \longrightarrow 0$ $\quad A(tt') \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

3/ - D'autres applications seront données par la suite en liaison plus directe avec le calcul des Probabilités. Les applications qui viennent d'être données ont seulement pour but de montrer l'intérêt d'une définition directe des fonctionnelles Π -multiplicatives sans passer par l'intermédiaire des opérations qui permettent de déduire une fonctionnelle Π -multiplicative d'une fonctionnelle σ -additive.

Opérations sur les fonctionnelles Π-multiplicatives.

1/ - Multiplication.

Théorème IV-1.

Si deux fonctionnelles φ_1 et φ_2 Π-multiplicatives sont défini[es] sur une même famille de parties classifiées et prennent leur valeur s[ur] un même demi-groupe multiplicatif la fonctionnelle φ_3 définie par $\varphi_3(A) = \varphi_1(A)\varphi_2(A)$ est Π-multiplicative.

En effet, nous aurons :

$$k(\varphi_3) \leqslant k(\varphi_1) + k(\varphi_2)$$

Donc : $$h(\varphi_3) \leqslant h(\varphi_1) + h(\varphi_2)$$

Si $A \longrightarrow \emptyset$, $\varphi_1(A) \longrightarrow e$ (élément neutre du groupe) $\varphi_2(A) \longrightarrow e$.

Donc $$\varphi_3(A) \longrightarrow e.$$

$$\Pi\Big(\varphi_1(A_i)\varphi_2(A_i)\Big) = \Pi\ \varphi_1(A_i)\ \Pi\ \varphi_2(A_i)$$

$$\text{Lim.}\ \varphi_1(A_i)\varphi_2(A_i) = \text{Lim}\,\varphi_1(A_i)\ \text{Lim}\,\varphi_2(A_i)$$

2/- Division.

Il est clair que le quotient de φ_1 par φ_2 est une fonctionnelle [si] φ_2 prend ses valeurs dans un groupe. Si φ_2 prend ses valeurs dans u[n] corps il faudra imposer de plus que φ_2 ne s'annule jamais.

3/ - Elévation à une puissance.

Théorème IV-2

Si la fonctionnelle φ_1 prend ses valeurs dans un demi-groupe ([ou] un corps) pour les éléments duquel on sait définir l'élévation à la puis[-] sance t, à toute valeur x de φ_1 on sait faire correspondre $k(x^t)$. Si [de] plus, on a entre $k(x)$ et $k(x^t)$ la relation :

$$k(x^t) \leqslant |t|\ k(x)$$

Pour toute partie classifiée de E on saura définir une fonctio[n-] nelle φ_2 par :

$$\varphi_2(A) = \varphi_1^t(A)$$

φ_2 est bien une fonctionnelle multiplicative. En effet :

$$\varphi_2(A \cup B) = \varphi_1^t(A \cup B)$$

$$= \Big(\varphi_1(A)\varphi_1(B)\Big)^t$$

$$= \varphi_1^t(A)\varphi_1^t(B)$$

$$= \varphi_2(A)\varphi_2(B)$$

our A et B disjoints. Elle est bien bornée car :

$$k\Big(\varphi_2(A)\Big) \leqslant t\, k\Big(\varphi_1(A)\Big) \leqslant t\, h(\varphi_1)$$

$$h(\varphi_2) \leqslant t\, h(\varphi_1)$$

lle est bien Π-multiplicative car si A $\emptyset$

$$\varphi_1(A) \longrightarrow E \qquad \varphi_2(A) \longrightarrow E$$

4/ - Limites.

Si la suite des hauteurs h_n d'une suite de fonctionnelles φ_n tend ers zéro on dira que la suite des fonctionnelles converge vers la fonc- onnelle neutre. La suite des valeurs des fonctionnelles pour une partie lassifiée quelconque tend vers E car :

$$k\Big(\varphi_n(A)\Big) \leqslant h_n \longrightarrow 0$$

Si la suite des hauteurs h_n d'une fonctionnelle φ_n est telle que

$$h(\varphi_n) \leqslant H \qquad\qquad h(\varphi_p\,\varphi_q^{-1}) \longrightarrow 0$$

ıelle que soit la façon dont p et q augmentent indéfiniment. Il existe ıe fonctionnelle φ telle que $\varphi\,\varphi_n^{-1}$ converge vers la fonctionnelle neutre. n dira que φ_n converge vers φ ou que φ est la limite de φ_n. A toute ırtie classifiée de A il correspond $\varphi_n(A)$. Etant donné ε_p on peut dé- rminer p et q de façon que :

$$k\Big(\varphi_p(A)\varphi_q^{-1}(A)\Big) < \varepsilon_p$$

en prenant $\varepsilon_q < \varepsilon_p - k\Big(\varphi_p(A)\,\varphi_q^{-1}(A)\Big)$

intervalle $k\Big(\varphi_q(A)\Big) - \varepsilon_q,\ k\,\varphi_q(A) + \varepsilon_q$ sera entièrement contenu dans intervalle :

$$k\Big(\varphi_p(A)\Big) - \varepsilon_p\ , \qquad k\Big(\varphi_p(A)\Big) + \varepsilon_p$$

filtre ainsi défini converge vers une valeur que l'on appellera $\varphi(A)$. ıel que soit ε il est possible de trouver $\varphi_N(A)$ tel que :

$$k\Big(\varphi_n(A)\varphi^{-1}(A)\Big) < \varepsilon \qquad \text{pour tout } n > N$$

Soit $b = \bigcup A_i$, A_i étant des parties classifiées disjointes. $\varphi(A_i)$ la valeur de la fonctionnelle pour A_i, il est possible de choisi[r] des ε_i de façon que $\sum \varepsilon_i < \varepsilon$ et des N_i de façon que :

$$k\left(\varphi_{n_i}(A_i)\varphi^{-1}(A_i)\right) < \varepsilon_i \qquad \text{pour } n_i > N_i$$

Posons :

$$S_p = \prod_1^p \varphi(A_i) \qquad B_p = \bigcup_1^p A_i$$

$$N_{(p)} = \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} N_i$$

Pour tout $n > N_{(p)}$ on aura :

$$k\left(\varphi_n(A_i)\varphi^{-1}(A_i)\right) < \varepsilon_i$$

$$k\left(\prod_1^p \varphi_n(A_i)\, S_p^{-1}\right) < \sum_1^p \varepsilon_i < \varepsilon$$

$$k\left(\varphi_n B_p\, S_p^{-1}\right) < \varepsilon$$

Or, $\varphi_n B_p$ converge vers $\varphi(B_p)$ et il est possible de choisir [...] façon que :

$$k\left(\varphi(B_p)\,\varphi_n^{-1}(B_p)\right) < \eta$$

On aura donc :

$$k\left(\varphi(B_p)\, S_p^{-1}\right) < \varepsilon + \eta \quad \text{quels que soient } \eta \text{ et } \varepsilon.$$

Donc :

$$\varphi(B_p) = S_p$$

Ceci étant vrai quel que soit p fini, si p augmente indéfiniment, S_p con[-]verge vers une limite S. En effet :

$$\sum_1^p k\left(\varphi(A_i)\right) < \sum_1^p \varepsilon_i + \sum_1^p k\left(\varphi_{n_i}(A_i)\right)$$

ou :

$$\sum_1^p k\left(\varphi_{n_i}(A_i)\right) < h(\varphi_{n_i}) < H$$

$$\sum_1^p k\left(\varphi(A_i)\right) < H + \varepsilon$$

qui est une borne indépendante de p; donc $\sum_1^{+\infty} k\varphi(A_i)$ converge, $\prod \varphi(A_i)$ est absolument convergent, $\varphi(B_p)$ converge donc vers S et l'on a

$$\varphi \bigcup_1^{+\infty} A_i = \prod_1^{+\infty} \varphi(A_i)$$

5/ - Produits Infinis.

Théorème IV-3

Un produit infini de puissances de fonctionnelles définit une fonctionnelle Π-multiplicative si la série $\sum |t_n| h\varphi_n$ est convergente.

Posons :

$$\Psi_p = \prod_1^p \varphi_n^{t_n}$$

Ψ_p est une fonctionnelle Π-multiplicative. Sa hauteur $h(\Psi_p)$ est bornée car :

$$h(\Psi_p) \leqslant \sum_1^p |t_n| h(\varphi_n)$$

En effet, pour tout A :

$$\begin{aligned} k\Psi_p(A) &= k\left(\prod_1^p \varphi_n^{t_n}(A)\right) \\ &\leqslant \sum_1^p |t_n| k\left(\varphi_n(A)\right) \\ &\leqslant \sum_1^p |t_n| h(\varphi_n) \end{aligned}$$

La suite Ψ_p est convergente si :

$$h(\Psi_p) < H \text{ quel que soit } p.$$

$h(\Psi_p . \Psi_q^{-1}) \longrightarrow 0$ quels que soient p et q suffisamment grands. Or, si S converge vers une valeur H :

$$h(\Psi_p) \leqslant \sum |t_n| h(\Psi_n) \leqslant H \text{ quel que soit } p.$$

$h(\Psi_p \ \Psi_q^{-1}) \leqslant \sum_q^p |t_n| h(\varphi_n)$ 0 quand p et q augmentent indéfiniment. En effet, pour tout A :

$$\begin{aligned} k\ \Psi_p(A)\Psi_q^{-1}(A) &= k\left(\prod_q^p \varphi_n^{t_n}(A)\right) \\ &\leqslant \sum_q^p |t_n| k\left(\varphi_n(A)\right) \\ &\leqslant \sum_q^p |t_n| h(\varphi_n) \end{aligned}$$

6/ - Puissance d'une fonctionnelle Π-multiplicative par une fonction semi-étagée.

Soit une fonction semi-étagée f prenant ses valeurs y dans un groupe F muni d'une norme n(y) et une fonctionnelle Π-multiplicative r prenant ses valeurs z dans un groupe multiplicatif G pourvu d'une nor-

me k(z) satisfaisant aux conditions précédemment établies. Soit une application de F.G dans H, notée $z^y = u$, H étant pourvu d'une norme, notée $|u|$ satisfaisant à :

$$u|z^y| \leqslant n(y)\,k(z)$$

Nous supposons de plus que l'opération z^y est distributive par rapport à la multiplication dans G.

Théorème IV-4

Il est possible de définir une fonctionnelle t prenant ses valeurs dans H, l'application $t = r^f$ du produit de l'espace Φ des fonctions F par l'espace ρ des fonctionnelles r dans l'espace θ des fonctionnelles t, étant distributive et continue par rapport à la multiplication dans ρ et par rapport à l'addition dans φ.

La démonstration est identique à celle par laquelle on démontre la propriété analogue pour le produit d'une fonctionnelle σ-additive par une fonction semi-étagée.

<u>Relations entre fonctionnelles σ-additives et fonctionnelles π-multiplicatives.</u>

Soit une fonctionnelle σ-additive r prenant ses valeurs z dans un groupe G muni d'une norme n(z) satisfaisant aux conditions définies pour les fonctionnelles σ-additives; une fonction semi-étagée f prenant ses valeurs y dans un groupe additif distancié F pourvu d'une norme $|y|$. Soit un groupe H dont les éléments u sont pourvus d'une norme k(u) satisfaisant aux conditions d'une fonctionnelle π-multiplicative.

Soit une application de F.G dans H, notée $z^y = u$ telle que :

$$k(u) \leqslant n(z)\,|y|.$$

Théorème IV-5

Nous pouvons définir une fonctionnelle π-multiplicative $t = f^r$ prenant ses valeurs dans H, l'application $t = f^r$ du produit de l'espace φ des fonctions f par l'espace ρ des fonctionnelles σ-additives r dans l'espace θ des fonctionnelles π-multiplicatives t, étant distributive et continue par rapport à la multiplication dans Φ et l'addition dans ρ.

1/ - Soit d'abord, pour f une constante a; pour toute classe P de C(E), on définira la fonctionnelle t par :

$$t(P) = a^{r(P)}$$

Nous aurons bien une fonctionnelle multiplicative puisque pour P_1, P_2 disjoints, on aura :

$$t(P_1 \cup P_2) = a^{r(P_1 \cup P_2)} = a^{r(P_1) + r(P_2)}$$

$$= a^{r(P_1)} a^{r(P_2)} = t(P_1)\, t(P_2)$$

Cette fonctionnelle sera bornée puisque :

$$k\big(t(P)\big) \leqslant |a|\, n\big(r(P)\big)$$

$$\leqslant |a|\, h(r)$$

Donc $h(t) \leqslant |a|\, h(r)$

Elle sera π-multiplicative puisque :

$$\sum k\big(t(P_i)\big) \leqslant h(t)$$

ce qui entraîne que :

$\prod t(P_i)$ est absolument convergent.

D'autre part, $P_i \longrightarrow \emptyset$ entraîne :

$$r(P_i) \longrightarrow 0$$

$t(P_i) \longrightarrow a^{\circ} = e$, e étant élément neutre.

2/ - Prenons maintenant pour f une fonction étagée. Pour toute classe P de C(E) pour laquelle :

$$\text{Osc } f = 0$$

c'est-à-dire $f = \lambda_p$. Nous définirons t par : $t(p) = \lambda_p^{r(P)}$

Toute classe Q de C(E) est une réunion dénombrable de telles classes. En effet, soit π une répartition en classes sur les classes P_i de laquelle :

$$\text{Osc } f = 0$$

On a :

$$E = \cup P_i$$

$$Q = E \cap Q = \bigcup P_i \cap Q$$

Or, $P_i \cap Q$ est soit vide soit P_i soit Q.

Si c'est Q c'est que Q est lui-même un P_i

Si c'est P_i nous avons : $Q = \bigcup P_j$

En appelant P_j toutes les classes P_i telles que : $Q \cap P_i \neq \emptyset$. En effet si un P_i a un point commun avec Q il est contenu dans Q puisqu'il ne le contient pas. Toute classe Q de C(E) est donc une réunion dénombrable de P_j et nous prendrons pour t(Q) :

$$t(Q) = \prod_j \lambda_{P_j}^{r(P_j)}$$

Ce produit est absolument convergent puisque :

$$k\left(t(Q)\right) \leqslant h(t)$$

t(Q) est indépendant de la répartition π car si je remplace P_j par une réunion de classes $P_{j'}$, j'aurai :

$$\lambda_{P_j}^{r(P_j)} = \lambda_{P_j}^{\sum r(P_{j'})} = \prod_{j'} \left(\lambda_{P_j}^{r(P_{j'})}\right) = \prod_{j'} \left(\lambda_{P_{j'}}^{r(P_{j'})}\right)$$

Pour toute réunion A de classes de C(E) je prendrai comme valeur de t(A) :

$$t(A) = \prod_k \lambda_{P_k}^{r(P_k)}$$

Pour tout : $B = \text{Lim } A_i$ $\qquad t(B) = \text{Lim } t(A_i)$
Tout $k\left(t(A_i)\right)$ est majoré par :

$$\sum k \lambda_{P_k}^{r(P_k)} \leqslant \sum |\lambda_{P_k}| \, n\left(r(P_k)\right) \leqslant h(t)$$

Donc tout : $t(B) = \text{Lim } k\left(t(A_i)\right) \leqslant h(t)$

La fonctionnelle t est donc définie pour toute partie classifiée si f est une fonction étagée.

3/ - La continuité de l'opération se démontre de la même façon que nous avons démontré la continuité du produit d' une fonction par une fonctionnelle σ-additive sur l'espace Φ.

Nous en conclurons une définition de f^r pour f semi-étagé par passage à la limite.

Nous pourrions écrire la fonctionnelle t sous la forme : $t = f^r$. En fait il est préférable de l'écrire par analogie avec l'écriture des intégrales :

$$t = \prod f^{dr} \text{ pour la fonctionnelle}$$

et $t(A) = \prod_A f^{dr}$ pour la valeur de la fonctionnelle corrrespondant à un ensemble A.

Dans le cas où la fonction f se réduit à la constante e, $\prod_A e^{dx}$ se réduit à la valeur : $e^{\int_A dx}$

Pour $A = \{a < x \leqslant b\}$ l'expression devient $e^{b-a} = e^b e^{-a}$ qui est la valeur de la fonctionnelle déduite de la fonction positive croissante e^x. Nous avons donc identité entre la fonctionnelle φ_1 déduite de e^x et la fonctionnelle φ_2 obtenue en élevant e à la puissance r quand r est la fonctionnelle de Lebesgues.

Plus généralement nous pourrons chercher si, étant donné une fonctionnelle définie directement à partir d'une fonction g(x) par :

$$\varphi\,(a \leqslant x < b) = g(b)\, g^{-1}(a)$$

(ce que nous pourrons noter : ${}^a\lceil g(x) \rfloor^b$).

On peut trouver une fonction f telle que : $\varphi = \prod f^{dx}$

Nous écrirons également :

$$^a\lceil g(x) \rfloor^b = \prod_a^b f^{dx}$$

Nous dirons que f^{dx} est le quotientiel de la fonctionnelle, que f est la quotientiée de g, que g est le produit intégral indéfini de f.

Théorème IV-6

Les opérations sur les quotientiels sont les mêmes que celles sur les exposants.

1/ - Soit $f = u^v$

Les fonctionnelles $(u^v)^{dx}$ et u^{vdx} sont identiques. En effet, elles sont identiques sur toute classe de C. Supposons d'abord u et v étagés et prenons une classe P sur laquelle :

Osc v = 0 Osc u = 0

Nous avons alors :

$$\prod_P (u^v)^{dx} = \left(u(P)^{v(P)}\right)^{r(P)}$$

$$\prod_P u^{vdx} = u(P)^{v(P)\,r(P)}$$

Ces deux expressions sont égales. Une classe quelconque Q étant réunion dénombrable de telles classes on a :

$$\prod_Q (u^v)^{dx} = \prod_{P \subset Q}\left(\prod (u^v)^{dx}\right)$$
$$= \prod_{P \subset Q}\left(\prod_P u^{vdx}\right)$$
$$= \prod_Q u^{vdx}$$

Puis par passage à la limite pour les parties classifiées nous montrons l'identité des fonctionnelles si u et v sont étagées, puis par passage à la limite pour u et v nous montrons l'identité des fonctionnelles pour u et v semi-étagées.

2/ - $(f^{dx})^h = f^{hdx}$

Nous procèderons de la même manière. Supposons d'abord f et h étagés, prenons une classe P sur laquelle f et h sont constants :

$$\prod_P (f^{dx})^h = \left(f(P)^{r(P)}\right)^{h(P)} = f(P)^{h(P)\;r(P)} = \prod_P f^{hdx}$$

Une classe Q étant union dénombrable de classes P nous avons :

$$\prod_{Q'} (f^{dx})^h = \prod_{Q'} f^{hdx}$$

Par passage à la limite pour les parties classifiées A :

$$\prod_A (f^{dx})^h = \prod_A f^{hdx}$$

Puis par passage à la limite pour les fonctions semi-étagées :

$$\prod (f^{dx})^h = \prod f^{hdx}$$

En résumé nous avons :

$$\boxed{e^{\int g\,dr} = \prod e^{g\,dr} = \prod (e^{dr})^g = \prod (e^g)^{dr}}$$

Recherche du quotientiel.

Soit la fonctionnelle π-multiplicative φ et la fonctionnelle σ-additive m définies sur E. Définissons une fonctionnelle q par :

$$q(A) = \varphi(A)^{m^{-1}(A)}$$

l'opération étant supposée possible.

Nous supposerons donc que les classes A pour lesquelles nous définissons q(A) appartiennent à une répartition m-régulière et que pour les classes A m-négligeables $\varphi(A) = e$, l'opération étant alors indéterminée.

Nous sommes donc amenés à déterminer un sous-ensemble CH de E m-négligeable et nous écrirons pour tout A :

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap CH) \prod_{A_i \subset A \cap H} q^{m(A_i)}(A_i)$$

Si CH est vide nous dirons que la fonctionnelle φ est continue par rapport à m. Quand nous considérons des suites d'ensembles A_i convergents vers le point x nous pourrons rechercher si $q(A_i)$ tend vers une limite g(x).

On démontrerait de la même façon que l'on a établi l'existence d'une dérivée d'une fonctionnelle σ-additive par rapport à une autre, que si $\varphi(A)m^{-1}(A)$ est borné quel que soit A, g(x) existe (sauf peut-être sur un ensemble m -négligeable) et que :

$$\varphi(A \cap H) = \prod_{A \cap H} g^{dm}$$

Quand A_i tend vers x, $\varphi(A_i) = q^{m(A_i)}(A_i)$

$$< k^{\varepsilon}$$

$$\longrightarrow I$$

I étant l'élément neutre du groupe multiplicatif sur lequel φ est défini . Nous poserons si ce groupe est un corps ou un anneau :

$$\varphi(A_i) = I + v(A_i)$$

avec $v(A_i) \longrightarrow 0$ si $m(A_i) \longrightarrow 0$

Et nous aurons :

$$g(x) = \lim_{A_i \longrightarrow x} \left[\left(I + v(A_i)\right)^{m^{-1}(A_i)} \right]$$

En particulier s'il est possible de développer $(I + v)^{\alpha}$ en série par la formule du binôme :

$$(I + v)^{\alpha} = I + \alpha v + \dots \frac{\alpha \dots (\alpha - p + 1)}{p!} v^p + \dots$$

$$(I + v)^{\alpha} = I + \alpha v + \dots \frac{1 \dots \left(1 - (p - 1)\alpha^{-1}\right)}{p!} (\alpha v)^p$$

En supposant que :

$\alpha v = v(A_i) m^{-1} (A_i)$ tende vers une limite $l(x)$, $(I + v)^{\alpha}$ tendra vers une limite :

$$g(x) = I + \dots + \frac{l^p_{(x)}}{p!} + \dots$$

que nous pourrons noter formellement : e^l ce qui nous donne :

$$g(x) = e^{l(x)}$$

avec $l(x) = \text{Lim}\left[\left(\varphi(A_i) - I\right) m^{-1} (A_i)\right]$

<u>Exemples</u> :

Dans le cas particulier où m est la mesure de Lebesgues et φ la valeur réelle positive, on a :

$$\varphi = \prod (1 + dv) = q^{dx} = e^{l dx} = e^{dv}$$

car : $q = e^l$ $\qquad l = \frac{dv}{dx}$

Dans le cas particulier déjà étudié des matrices

$$A(t, t') = \begin{vmatrix} \cos (t - t') & \sin (t - t') \\ -\sin (t - t') & \cos (t - t') \end{vmatrix}$$

$$A(t, t + \Delta t) = \begin{vmatrix} \cos \Delta t & \sin \Delta t \\ -\sin \Delta t & \cos \Delta t \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\text{Lim } A - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta t} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$q = e^{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{vmatrix}$$

$$A(t, t') = \prod_{t'}^{t} \begin{vmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{vmatrix}^{dt}$$

Si nous faisons t' = 0 dans cette égalité il vient :

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{vmatrix}^{t}$$

Compte tenu de :

$$\begin{vmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} -2 \sin \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sin \frac{1}{2} & -\cos \frac{1}{2} \\ \cos \frac{1}{2} & \sin \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Il vient :

$$\cos t = 1 - 2t \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1 - \pi}{2} + \ldots + \frac{t \ldots (t-p+1)}{p!} (-2 \sin \frac{1}{2})^{p} \cos \frac{p}{2} (1 - \pi) + \ldots$$

$$\sin t = -2t \sin \frac{1}{2} \sin \frac{1 - \pi}{2} + \ldots + \frac{t \ldots (t-p+1)}{p!} (-2 \sin \frac{1}{2})^{p} \sin \frac{p}{2} (1 - \pi) + \ldots$$

Probabilisation d'un ensemble fonctionnel.

Soit un ensemble fonctionnel F défini comme produit d'ensembles E_t, $t \in G$. Nous avons vu que nous pouvions construire sur cet espace une classification qui résulte des classifications sur les E_t. Il suffit pour cela de connaître des fonctions classifiantes d'une infinité de variables.

Mais les procédés que nous connaissons pour définir une fonctionnelle σ-additive sur F ne nous permettent pas de savoir si la classification sur les parties classifiées de laquelle est définie la fonctionnelle résulte des classifications sur les E_t.

Par conséquent nous ne savons pas encore s'il existe des fonctionnelles σ-additives sur les parties classifiées d'une classification qui résulte des classifications sur les E_t. Nous allons établir cette existence au moyen d'exemples.

Nous dirons que l'espace F est probabilisé s'il est classifié et s'il existe une fonctionnelle à valeur réelle σ-additive m sur les parties classifiées de F satisfaisant aux conditions :

(1) $m(Q) \geqslant 0$ pour toute partie classifiée $Q \in F$

(2) $m(P_A . P_B) = m(P_A . F_B)\, m(F_A . P_B)$

pour toutes parties classifiées P_A de F_A et P_B de F_B quels que soient les sous-ensembles A et B de G disjoints et complémentaires.

Si nous faisons $P_A = F_A$

$$P_B = F_B$$

dans (2) nous trouvons :

$$m(F_A . F_B) = m(F_A . F_B)m(F_A . F_B)$$

donc si m n'est pas la fonctionnelle nulle (ce qui serait un cas sans intérêt) on a :

$$(2') \qquad m(F_A . F_B) = 1$$

Avant de donner des exemples d'espaces probabilisés nous allons montrer que s'il existe sur F une classification qui résulte des $C(E_t)$ et une fonctionnelle m satisfaisant à (1) et (2') il est possible de trouver un espace F' produit d'ensemble E'_t, $t \in G$, une application de F' sur F et une fonctionnelle σ-additive μ satisfaisant à (1) et (2) telle que la valeur de μ sur les origines dans F' des parties classifiées de F soit égale à la valeur de m pour ces parties classifiées. Ce théorème nous permettra d'étendre le champ d'applications des exemples que nous donnerons par la suite.

Considérons une classification $C(E_{t_o})$ sur un E_{t_o} correspondant à une valeur donnée t_o de t. Posons : $C\{t_o\} = L$.

Soit V une partie classifiée de $C(E_{t_o})$; la fonctionnelle définie par $\varphi_{t_o}(V) = m(V.F_L)$ est une fonctionnelle σ-additive sur E_{t_o} satisfaisant à (1) et à (2').

Nous appellerons E'_{t_o} l'ensemble d'élement générateur u_{t_o}, u_{t_o} étant défini au moyen des deux nombres v, w compris entre 0 et 1 la relation d'ordre sur E'_{t_o} étant définie par :

$$u'_{t_o} < u_{t_o} \qquad \text{si} \quad v' < v$$

$$\text{ou si} \quad v' = v \qquad u' < u$$

et une mesure sur E'_{t_o} étant définie par :

$$m(U) = v_2 - v_1$$

Si U est une classe $(v_1, w_1) < u_{t_o} \leqslant (v_2, w_2)$.

Nous pouvons considérer la fonction de $a \in E_{t_o}$ définie par :

$$g_{t_o}(a) = \left(v(a),\ w(a)\right) \text{ avec :}$$

$$v(a) = \int_{u_{t_o} \leqslant a} d\varphi_{t_o(v)}$$

$$w(a) = (a - a_1)(a_2 - a_1)^{-1}$$

a_1 et a_2 étant les bornes de l'ensemble des u_{t_o} tels que :

$$v(u_{t_o}) = v(a)$$

$A_{t_o}(a)$ l'ensemble des $u_{t_o} \in E'_{t_o}$ satisfaisant à :

$$u_{t_o} \leqslant g_{t_o}(a)$$

$B_{t_o}(a)$ l'ensemble des $u_{t_o} \in \bigcup_{u'_{t_o} < a} A_{t_o}(u'_{t_o})$

$D_{t_o}(a)$ l'ensemble défini par $= A_{t_o}(a) \cap C B_{t_o}(a)$.

D_{t_o} existe quel que soit $a \in E_{t_o}$ et tout u_{t_o} est élément d'un $D_{t_o}(a)$ et d'un seul.

La correspondance entre u_{t_o} et le a du $D_{t_o}(a)$ qui contient u_{t_o} définit une application de E'_{t_o} sur E_{t_o}.

Dans cette application les parties classifiées V de E_t sont les images de parties classifiées V' de E'_{t_o} dont la mesure de Lebesgues est égale à la valeur de $\varphi_{t_o}(V)$.

Supposons que nous connaissions une projection F_M de F, pour laquelle on connaisse un espace $F'_M = \prod_{t \in M} E'_t$, une application de F'_M sur F_M et que la valeur de la fonctionnelle définie par :

$$\varphi_M(P) = m(P\ F_{CM})$$

soit égale sur les parties classifiées P de F_M image de parties classifiées P' de F'_M à la valeur d'une fonctionnelle $\mu(P')$ sur les parties classifiées de F'_M qui satisfait aux conditions (1) et (2).

Soit un élément $t_n \in CM$, N l'ensemble composé de ce seul élément.

Posons : $L = CM \cup N$.

Considérons la fonctionnelle σ-additive définie par $\varphi_{M \cup N}(Q) = m(Q.F_L)$ et la fonctionnelle définie sur les parties classifiées Q de $F_{M \cup N}$ qui sont de la forme $Q = P.\Delta$ (Δ étant une partie classifiée de F_N) par :

$$g(P.\Delta) = m(P\Delta.F_L)\,m^{-1}\,(P.F_N.F_L)$$

en posant par abréviation et analogie :

$$F_N = E_{t_n}$$

Nous avons :

$$m(P.\Delta.F_L) \leqslant m(P.F_N.F_L)$$

et $g(P.\Delta)$ considéré par rapport aux parties classifiées de F_M pour un ensemble Δ donné est le quotient de deux fonctionnelles σ-additives dans lequel la fonctionnelle divisée est continue par rapport à la fonctionnelle diviseur; de sorte que, quand on fait tendre P vers le point X_M, $g(P.\Delta)$ tend vers une fonction semi-étagée de X_M, que nous appellerons $h(X_M, \Delta)$. Nous avons donc :

$$m(P.\Delta.F_L) = \int_P h(X_M,\Delta)\,d\varphi_M$$

Compte tenu de l'application de F'_M sur F_M on peut également écrire :

$$m(P.\Delta.F_L) = \int_{P'} h(X'_M, \Delta)\,d\mu$$

Si nous considérons $g(P.\Delta)$ comme une fonctionnelle en Δ, nous voyons sans peine qu'elle est σ-additive de sorte que par passage à la limite $h(X'_M, \Delta)$ est également une fonctionnelle σ-additive sur les parties classifiées Δ de F_N.

$h(X'_M, \Delta)$ prend ses valeurs sur $0 \leqslant (v, w) \leqslant 1$ nous appellerons E'_{t_n} ou F'_N cet ensemble et nous considèrerons les applications de F'_N sur F_N définies de la même manière que l'application de E'_{t_o} au moyen des fonctionnelles $V_{X'_M}(\Delta)$ égales pour une valeur donnée de X'_M à la fonctionnelle $h(X'_M, \Delta)$. Dans ces applications l'ensemble $\Delta'(X'_M)$ dont l'image est Δ a pour mesure de Lebesgues :

$$\int_{\Delta'(X'_M)} du = h(X'_M, \Delta)$$

Nous avons donc :

$$m(P.\Delta.F_L) = \int_{P'} \int_{\Delta'(X'_M)} du$$

Si nous considérons une partie classifiée Q réunion de classes

$P.\Delta$ disjointes, nous pouvons grouper les classes qui ont la même projection sur F_M. Les projections sur F_N de leurs éléments qui se projettent au même point X'_M de F_M, sont donc disjointes, et par conséquent l'on peut écrire :

$$m\left(\bigcup(P.\Delta.F_L)\right) = \int_{P'} d\mu \left(\sum \int_{\Delta'(X'_M)} du\right)$$

$$= \int_{P'} d\mu \int_{\bigcup \Delta'(X'_M)} du$$

Si nous passons à la limite, en désignant par $Q'(X'_M)$ la projection des éléments de Q' qui se projettent au point X'_M de P' sur F_M, nous avons :

$$m(Q.F_L) = \int_{P'} d\mu \int_{Q'(X'_M)} du = \iint_{Q'} d\mu\, du$$

Nous pouvons donc étendre la propriété de proche en proche par récurrence transfinie.

Si donc nous avons trouvé une fonctionnelle σ-additive satisfaisant à (1) et à (2') sur partie classifiées d'une classification de F qui résulte des $C(E_t)$ il sera possible de trouver une fonctionnelle σ-additive satisfaisant à (1) et (2) sur l'espace F' que nous venons de construire.

Réciproquement il est bien évident que si nous savons construire un espace F' produit pour $t \in G$ d'ensembles E'_t de la forme indiquée ci-dessus et si nous connaissons une application de F' sur F à toute fonctionnelle σ-additive μ sur F' nous pourrons faire correspondre une fonctionnelle σ-additive m sur F par la condition que m(P) est égale à $\mu(P')$ sur toute partie classifiée P, image de la partie classifiée P' de F' dans l'application de F' sur F.

Nous allons chercher maintenant à construire une fonctionnelle σ-additive μ sur F' satisfaisant à (1) et à (2).

Soit donc une infinité d'ensembles E'_t $t \in G$; P'_t les classes définies sur ces ensembles. Nous pouvons poser que si $N \subset G$:

$$F_N = \prod_{t \in N} E'_t \qquad\qquad P'_N = \prod_{t \in N} P'_t$$

et que : $n_N(P'_N)$ est la mesure de P'_N sur F'_N. (Par abréviation si N = G nous écrirons : F', P', m(P') les grandeurs correspondantes).

On a : $$m_N(P'_N) = m(P'_N . F'_{C\,N})$$

Donc : $m(P') \leqslant m_N(P'_N) \leqslant 1$

Nous aurons, si les N_i forment une répartition en classes de G,

$$P' = \prod_i P_{N_i}$$

$$m(P') = \prod_i m_{N_i}(P'_{N_i})$$

Nous poserons par abréviation :

$$\varphi(N_i, P') = m_{N_i}(P'_{N_i})$$

$\varphi(N_i, P')$ est une fonctionnelle π-multiplicative par rapport à N_i car nous avons :

$$m_{\bigcup N_i}(P'_{\bigcup N_i}) = \prod m_{N_i}(P'_{N_i})$$

c'est-à-dire :

$$\varphi(\bigcup N_i, P') = \prod \varphi(N_i, P')$$

et de plus φ est manifestement bornée et continue. De l'inégalité trouvées précédemment :

$$m(P') \leqslant m_N(P'_N) \leqslant 1$$

nous déduisons pour φ :

$$\varphi(G, P') \leqslant \varphi(N, P') \leqslant 1$$

Le nombre q des ensembles N_j d'une famille d'ensembles inclus dans G disjoints et tels que :

$$\varphi(N_j, P') \leqslant k < 1$$

est tel que :

$$\varphi(G, P') = \prod_j \varphi(N_j, P') \cdot \varphi(C_{\bigcup} N_j, P') \leqslant k^q$$

donc :

$$q \leqslant \text{Log}\, \varphi(G, P')(\text{Log}\, k')^{-1}$$

en changeant le sens de l'inégalité parce que les logarithmes sont négatifs.

Si $\varphi(N, P')$ ne tend pas vers 1 quand N tend vers $\{t_p\}$, les φ for-

mant une suite croissante ils convergent vers l_p. Le nombre de l_p inférieurs ou égaux à k est inférieur à :

$$\text{Log } \varphi(G, P')(\text{Log } k)^{-1}$$

Il n'y a donc qu'une infinité dénombrable de t_p tels que $l_p \neq 1$.

Nous devons donc avoir sauf pour une infinité dénombrable au plus de valeurs de t, la relation :

$$m_t(P'_t) = 1$$

Il n'est pas incompatible de supposer que cette condition est réalisée quel que soit $t \in N$ et que l'on a cependant :

$$(N, P') = h < 1$$

En effet, si nous supposons que N est réunion dénombrable d'éléments N_i pour lesquels une mesure $\mu(t)$ définie sur G prend la valeur $N_i \neq 0$; nous avons :

$$\varphi(N, P') = \prod_i \varphi(N_i, p')$$
$$= \prod_i \left[\left(\varphi(N_i, P')\right)^{n_i - 1} \right]^{n_i}$$

Si de plus $\left(\varphi(N_i, P')\right)^{n_i-1}$ tend vers λ_t (ce qui a lieu si φ admet un quotentiel par rapport à μ) quand N_i tend vers $\{t\}$ nous aurons, en posant $n_i = d\mu(t)$:

$$\varphi(N, P') = \prod_{t \in N} \lambda_t \, d\mu(t)$$

et

$$m_t(P'_t) = \text{Lim} \left(\lambda_t^{d\mu(t)} \right) = 1$$

Remarquons en passant que l'on a nécessairement $0 \leqslant \lambda_t \leqslant 1$.

On voit donc que la fonctionnelle $\varphi(N,P')$ n'est pas complètement déterminée par la valeur de $m_t(P'_t)$ pour tout $t \in N$. Il faut connaître en outre la valeur de λ_t.

Si nous limitons pour P'_t aux ensembles de la forme $0 \leqslant u \leqslant (v, w)$ nous voyons que la condition $m_t(P'_t) = 1$ entraine $v = 1$; mais nous pouvons convenir par exemple de poser $w = \lambda_t$.

Nous pouvons donc définir une valeur non nulle de la fonctionnelle pour les classes de P' qui sont de la forme $\prod P'_t$ avec tous les P'_t de la forme :

$$0 \leqslant u \leqslant (1, w)$$

Nous remarquons que toutes ces classes contiennent l'ensemble $Q' = \prod Q'_t$ où Q'_t est l'ensemble : $0 \leqslant u \leqslant (1,0)$.

La méthode ne nous permet donc de mesurer que des ensembles N' particuliers puisque la fonctionnelle est définie au moyen de ses valeurs sur des classes qui contiennent toutes l'ensemble Q' et n'est donc définie pour aucun sous-ensemble de Q'. De même la fonctionnelle sur F ne sera défini pour aucun sous-ensemble de l'ensemble Q.

On retrouve la théorie classique de la mesure des espaces fonctionnels comme cas particulier en prenant tous les P_t égaux aux E_t correspondants et les λ_t égaux à 1.

Les classes sont alors les produits de cubes à un nombre fini de dimensions, par les espaces définis sur le produit des autres coordonnées; ainsi que les cubes à une infinité dénombrable de dimensions pour lesquels le produit infini des mesures des côtés est convergent, ou plus exactement le produit de ces cubes par les espaces définis par le produit des ensembles E_t correspondant aux valeurs de t qui ne servent pas à la définition du cube.

Mais on peut former d'autres exemples de mesures sur F ou sur F'. On aura un cas particulier intéressant en prenant comme mesures sur les E_t de la forme $0 \leqslant u \leqslant 1$ des mesures de Dirac par conséquent à toute classe $0 \leqslant u \leqslant a$ sur E_t on pourra faire correspondre : $u' = (1, a)$. Donc, si les projections P_t d'une classe P de F sont définies par $0 \leqslant u_t \leqslant f(t)$ la mesure de P sera :

$$m(P) = \prod f(t)^{dt}$$

Il est facile d'imaginer d'autres exemples.

CHAPITRE V

APPLICATIONS AU CALCUL DES PROBABILITÉS

Nous avons vu au chapitre I que si une famille de variables X_i est liée à un même évènement il est possible de trouver un ensemble de variables faiblement indépendantes Y_j, telles que les X_i soient fonction des Y_j. C'est-à-dire que si nous considérons l'ensemble F défini par le produit des ensembles E_j des valeurs possibles pour les Y_j et si nous appelons V un élément quelconque de F nous aurons :

$$X_i = f_i(V)$$

Nous avons vu au chapitre II que pour que les X_i soient susceptibles d'être étudiés par les méthodes de la statistique mathématique, il est nécessaire de supposer que l'on connaît les répartitions en classes des valeurs que peuvent prendre les X_i et par conséquent que l'on sait définir une classification sur F.

Si nous supposons en outre que les variables Y_j sont elles aussi susceptibles d'être étudiées par les mêmes procédés, nous devrons supposer également que nous savons définir des classifications sur les ensembles E_j. Nous sommes donc amenés à faire l'hypothèse que la classification C(F) est compatible avec les $C(E_j)$.

Au chapitre III nous avons étudié les fonctionnelles σ-additives sur un ensemble. Nous pouvons ramener à cette étude la notion de probabilité. Soit une famille d'évènements $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$... Nous dirons qu'un évènement $\mathcal{E}$ est lié aux X_i s'il est possible de déterminer les valeurs que doivent prendre les X_i pour que l'évènement se réalise. Nous dirons que les évènements $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ... sont incompatibles s'il n'est pas possible de trouver un même système de valeurs des X_i telles que les évènements aient lieu simultanément.

Les ensembles de valeurs des X_i correspondant à des évènements incompatibles sont donc disjoints. Il en est de même des sous-ensembles de F pour lesquels on a ces valeurs.

La famille d'évènements sera dite exhaustive si à tout V correspond un évènement de la famille. Nous aurons défini une loi de probabilité si nous savons affecter à chacun des évènements $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$ d'une famille exhaustive d'évènements un nombre positif : $\Pr\{\mathcal{E}_1\}$ satisfaisant aux conditions :

1/ - La probabilité pour que l'un ou l'autre des deux évènements $\mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_2$ se réalise est la somme des probabilités pour que $\mathcal{E}_1$ se réalise et pour que $\mathcal{E}_2$ se réalise.

2/ - La probabilité pour que l'un quelconque des évènements de la famille se réalise, est 1.

Nous avons une fonctionnelle σ-additive sur F qui satisfait aux conditions (1) et (2') du chapitre IV. En effet, soit $P(\mathcal{E})$ le sous-ensemble de F pour les évènements duquel l'évènement $\mathcal{E}$ est réalisé; si à tout $P(\mathcal{E})$ nous faisons correspondre le nombre : $\Pr(\mathcal{E})$ nous aurons les relations :

$$P(\mathcal{E}_1 \text{ ou } \mathcal{E}_2) = P(\mathcal{E}_1) \cup P(\mathcal{E}_2)$$

$$\Pr\{\mathcal{E}_1 \text{ ou } \mathcal{E}_2\} = \Pr\{\mathcal{E}_1\} + \Pr\{\mathcal{E}_2\}$$

Donc $\Pr\{\mathcal{E}\}$ est une fonctionnelle additive de $P(\mathcal{E})$. Elle est manifestement bornée et continue; donc elle est σ-additive; de plus, elle satisfait à (1) et (2').

Nous avons donc défini sur F une classification C(F) compatible avec les $C(E_j)$ et une fonctionnelle σ-additive satisfaisant à (1) et (2'). Or, nous avons vu au chapitre IV qu'il est possible de déterminer un espace F', une application de F sur F' et une fonctionnelle σ-additive satisfaisant à (1) et (2). Mais si nous avons défini une application de F sur F' les X_i sont fonction de V', élément générateur de F'.

Les Y_j dont le produit définit F' sont faiblement indépendants. En effet, si l'on se donne les valeurs y_j' des Y_j' pour $j \in N$ il existe une application (fonction des y_j' ; j C_N) qui applique F_{C_N} sur F'_{C_N} ; comme on peut assigner aux Y_j, $j \in C_N$ n'importe quelle valeur y_j' choisie arbitrairement; car quelles que soient les valeurs y_j', $j \in C_N$ il est possible de trouver des valeurs y_j auxquelles correspondent les y_j' dans l'application sur F sur F'.

De plus, les variables Y'_j sont telles que l'on ait :

$$\Pr.\left\{y'_{j_1} \subset M'_{j_1} \;,\; y'_{j_2} \subset M'_{j_2}\right\} = \Pr.\left\{y'_{j_1} \subset M'_{j_1}\right\} \;\Pr.\left\{y'_{j_2} \subset M'_{j_2}\right\}$$

M'_{j_1} étant une partie classifiée de E'_{j_1}, M_{j_2} une partie classifiée de E'_{j_2}.

Les variables Y'_j sont donc indépendantes au sens classique du calcul des probabilités. Nous avons donc démontré le théorème suivant :

Si les variables X_i sont liées à un même évènement, si on peut les étudier par les méthodes de la statistique mathématique, si on peut assigner une loi de probabilité aux évènements qui en dépendent il est possible de trouver une famille de variables indépendantes Y'_j dont les X_i soient des fonctions certaines. En particulier, pour les processus stochastiques qui sont des familles de variables aléatoires dépendant d'un paramètre, la valeur du processus à un instant donné est une fonction d'un ensemble de variables aléatoires indépendantes qui dépend du paramètre.

Soit un processus stochastique $Z(t)$, soit B_t la plus petite base dont dépend $Z(t)$. Nous appellerons N_t l'ensemble $\bigcup_{t' \leqslant t} B_{t'}$; F_t l'ensemble $\prod_{j \in N_t} E_j$, E_j étant l'ensemble des valeurs que peut prendre Y_j. $Z(t)$ est une fonction de $V_t \in F_t$. Nous poserons :

$${}_{t_1}F_{t_2} = \prod_{j \in N_{t_2} \cap \complement N_{t_1}} E_j$$

$${}_{t_1}V_{t_2} \in {}_{t_1}F_{t_2}$$

On a : $$V_{t_2} = V_{t_1} \cdot {}_{t_1}V_{t_2}$$

$Z(t)$ est une fonction certaine de V_t donc $Z(t_2)$ est une fonction certaine de V_{t_1} et de ${}_{t_1}V_{t_2}$. Z est un processus déterministe si la donnée de $Z(t_1)$ définit $Z(t_2)$ quel que soit $t_2 \geqslant t_1$. Ce qui exige que $Z(t_2)$ ne dépende pas des $Y_j \in N_{t_2} \cap \complement N_{t_1}$; donc N_{t_1} contient la plus petite base dont dépente $Z(t_2)$ et par suite $N_{t_2} = N_{t_1}$. Si ceci est vrai quels que soient t_1 et t_2 l'égalité $F_{t_1} = F$ prouve que $Z(t)$ est une fonction certaine de t et de $V \in F$.

$Z(t)$ est un processus de Markoff si $Z(t_2)$ est une fonction certaine de $Z(t_1)$ et de ${}_{t_1}V_{t_2}$. L'ensemble des V_{t_1} tels que $Z(t_1) \leqslant z_1$ est une partie classifiée $P_1(z_1)$ de F_{t_1}.

L'ensemble des V_{t_2} tels que $Z_{t_2} < z_2$ est une partie classifiée

$P_2(z_2)$ de F_{t_2}. Si l'on peut avoir à la fois : $Z(t_1) \leqslant z_1$

$$Z(t_2) \leqslant z_2$$

c'est qu'il existe des points : V_{t_2} de $P_2(z_2)$ tels que :

$$V_{t_2} = V_{t_1} \times {}_{t_1}V_{t_2} \text{ avec } V_{t_2} \in P_2(z_2);\ V_{t_1} \in P_1(z_1)$$

Mais comme la valeur de $Z(t_2)$ ne dépend de V_{t_1} que par l'intermédiaire de $Z(t_1)$ c'est que si :

$$Z(V_{t_1} \times {}_{t_1}V_{t_2}) \leqslant z_2 \qquad\qquad Z(V_{t_1}) \leqslant z_1$$

pour $Z(V'_{t_1}) \leqslant z_1$; on aura également : $Z(V'_{t_1} \times {}_{t_1}V_{t_2}) \leqslant z_2$.

Donc pour tout point de $P_1(z_1) \times {}_{t_1}V_{t_2}$, on aura :

$$Z(V_{t_2}) \leqslant z_2 \qquad V_{t_2} \in P_2(z_2). \text{ Donc } P_1(z_1) \times {}_{t_1}V_{t_2} = P_2(z_2)$$

et par suite si l'on appelle ${}_{t_1}Q_{t_2}(z_1, z_2)$ l'ensemble des points ${}_{t_1}F_{t_2}$, tels qu'il existe un $V_{t_1} \in P_1(z_1)$ et un $V_{t_2} \in P_2(z_2)$, on aura :

$$P_1(z_1) \times {}_{t_1}Q_{t_2}(z_1, z_2) = P_2(z_2)$$

Si nous prenons les mesures m_1 de P_1, m_2 de P_2 nous voyons que la mesure μ de ${}_{t_1}Q_{t_2}$ est une fonction de z_1 et donc que nous avons défini un noyau $dN_{z_1}(z_2)$ de sorte que :

$$dm_2 = \int dm_1 \times dN$$

On peut écrire également :

$$\frac{dm_2}{dz_2} = \int dm_1 \frac{dN}{dz_2}$$

Si les ${}_{t_1}Q_{t_2}$ sont fonction d'une variable auxiliaire y nous aurons une relation entre z_1, z_2, et y et on pourra écrire en remplaçant z_1 par sa valeur en fonction de z_2 et de y :

$$\frac{dm_2}{dz_2} = - \int \frac{dm_1}{dz_1} \frac{\partial z_1}{\partial z_2} d\mu$$

En effet on a :

$$\int dm_1 \times \frac{d\mu}{dy} \frac{\partial y}{\partial z_2} = - \int \frac{dm_1}{dz_1} \frac{\partial z_1}{\partial z_2} d\mu$$

puisque : $\displaystyle\int \frac{dm}{dz_1}\ \frac{d\mu}{dy}\ \frac{dz_1}{\frac{\partial z_2}{\partial y}} = \int \frac{dm}{dz_1}\ \frac{d\mu}{dy}\ \frac{dy}{\frac{\partial z_2}{\partial z_1}}$

car :

$$\frac{\partial z_2}{\partial y}\ dy + \frac{\partial z_2}{\partial z_1}\ dz_1 = 0$$

FONCTIONNELLES Π-MULTIPLICATIVES PRENANT LEURS VALEURS SUR L'ENSEMBLE DES NOYAUX REGULIERS.

Soit une mesure $m(y)$ dépendant d'une variable x on dira que c'est un noyau $d_y N(x, y)$ ou $N(x, y)$ par abréviation. On peut définir sur l'ensemble des noyaux une addition en posant :

$$d(N_1 + N_2) = d\,N_1(x, y) + d\,N_2(x, y)$$

quels que soient x, y et dy. On obtient en effet une mesure par rapport à y dépendant de la variable x. On peut définir la multiplication d'un noyau par une constante $d(KN_1) = K\,d\,N_1$.

On peut définir une multiplication entre un noyau fonction par rapport à x et mesuré par rapport à z. On obtiendra un noyau fonction par rapport à x et mesuré par rapport à z au moyen de l'opération :

$$d_z(N_1 \times N_2) = \int_y d_z N_2(y, z)\, d_y N_1(x, y)$$

l'élément neutre I de la multiplication des noyaux sera le noyau défini par :

$$\int_A d_y N(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \subset A \\ 0 \text{ si } x \not\subset A \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $N_1 = N_2 = N$ on aura ainsi défini N^2. En raisonnant par récurrence on peut définir N^p quels que soient N et p entier. Si les mesures $m_x(y)$ sont comparables presque uniformément par rapport à x, nous pourrons définir une norme satisfaisant aux conditions de la théorie des fonctionnelles π-multiplicatives.

Définissons d'abord une prénorme :

$$]N[= \int_y dh; \quad \text{avec :} \quad dh = \operatorname{Sup}_x |dy\ N(x, y)|$$

si $N = N_1 + N_2$ nous avons : $dh \leqslant dh_1 + dh_2$ en effet quels que soient y et dy.

$$\operatorname*{Sup}_x |dN(xy)| \leqslant \operatorname*{Sup}_x |dN_1(xy)| + \operatorname*{Sup}_x |dN_2(xy)|$$

si $N = N_1 \times N_2$ nous avons

$$|dh| \leqslant \int_y |d_z N_2(yz)|\, dh_1$$
$$\leqslant \operatorname*{Sup}_y |d_z N_2(xz)| \int |dh_1$$
$$\leqslant dh_2 \int_y |dh_1|$$

Si $N = K N_1$ nous avons

$$\operatorname{Sup} |K\, d N_1(xy)| = |K| \operatorname*{Sup}_x |dN_1(xy)|$$

d'où $$dh = |K|\, dh_1$$

Si nous intégrons les relations précédentes par rapport à y il vient :

$$]N_1 + N_2[\, \leqslant\,]N_1[+]N_2[$$

$$]K N[= |K|\,]N[\qquad\qquad]N_1 N_2[\, \leqslant\,]N_1[.]N_2[$$

De la dernière relation nous pouvons tirer par récurrence :

$$]N^p[\, \leqslant\,]N[\qquad (1)$$

p étant un entier positif. $]N[$ s'appellera prénorme de N. Nous avons entre les prénormes les relations :

$$AB - I \equiv (A - I)(B - I) + (B - 1) + (A - I)$$

$$]AB - 1[\, \leqslant\,]A - 1[-]B - 1[+]B - 1[+]A - 1[$$

$$1 +]AB - 1[\, \leqslant (]A - 1[+ 1) . (]B - 1[+ 1).$$

Par récurrence en posant $B = A, A^2 \ldots A^{p-1}$ on obtient

$$1 +]A^p - 1[\, \leqslant (1 +]A - 1[)^p$$

Donc si nous posons

$$\{N\} = \operatorname{Log}(1 +]N - 1[)$$

nous avons la relation $\{AB\} \leqslant \{A\} + \{B\} \qquad \{A^p\} \leqslant p\{A\}$

La condition nécessaire et suffisante pour que $A \longrightarrow I$ est que $\{A\} \longrightarrow 0$. En effet pour que : $\{A\} \longrightarrow 0$ il faut et il suffit que $]A - I[\longrightarrow 0$. En effet si, étant donné ε il est possible de réaliser quel que soit M

$$\int_M \operatorname{Sup}_x d\,|A - I| < \varepsilon \text{ ; on aura pour tout } x_0 : \int_M d\,|A_0 - I| < \varepsilon$$

On devra donc avoir

$$|1 - \int_M dA_0| < \varepsilon \qquad \text{si } x_0 \in M$$

$$|\int_M dA_0| < \varepsilon \qquad \text{si } x_0 \notin M$$

Réciproquement si le noyau converge vers le noyau unité et si les x mesures sont uniformément comparables :

$$\int_M \operatorname{Sup}_x d\,|A - I| \leqslant k \int_M d\,|A_0 - I|$$

Soit maintenant un produit $\prod_1^{+\infty} A_i$ la condition nécessaire et suffisante pour que $\prod_1^{+\infty} A_i$ converge, est que : $\prod_p^q A_i \longrightarrow I$ quelle que soit la façon dont p et q augmentent indéfiniment.

Or $\left\{\prod_p^q A_i\right\} \leqslant \sum_p^q \{A_i\}$. Donc si $\sum_p^q \{A_i\} \longrightarrow 0$ quelle que soit la façon dont p et q augmentent indéfiniment $\prod_p^q A_i \longrightarrow I$ et le produit converge. Or, $\sum_p^q \{A_i\} \longrightarrow 0$ est la condition nécessaire et suffisante de convergence de $\sum_1^{+\infty} \{A_i\}$. Par conséquent si $\sum_1^{+\infty} \{A_i\}$ converge $\prod_1^{+\infty} A_i$ converge.

Donc $\{N\}$ est une norme satisfaisant aux conditions des fonctionnelles π-multiplicatives. Par conséquent si l'on sait définir une fonctionnelle multiplicative N(P) prenant ses valeurs dans l'ensemble des noyaux, sur les parties classifiées d'un ensemble E et si

1/ - $\{N(P_i)\}$ tend vers zéro quand P_i tend vers $\emptyset$

2/ - $\sum \{N(P)\} < H$ quand les P forment une répartition en classes quelconque de E, N(P) sera une fonctionnelle π-multiplicative.

Quand $P_i \longrightarrow \{x\}$ $\{N(P_i)\} \longrightarrow g(x)$. Il existe un ensemble fini de points tels que $g(x) > \lambda$. En effet dans le cas contraire on aurait :

$$\sum \{N(P_i)\} > m\lambda > H$$

Nous pouvons chercher à définir N^t quel que soit t. Supposons

que N soit de la forme : $1 + U$ et remplaçons u par U dans le dévelop-pement en série de $(1 + u)^t$

$$(1 + U)^t = 1 + tU + \dots + \frac{t \dots (t-p+1)}{p!} U^p + \dots$$

pour une valeur donnée de x nous aurons dans le second membre une série de mesures qui converge si la série des hauteurs converge. Or quand x varie la hauteur de U^p est bornée supérieurement par :

$$\int_x \mathrm{Sup} \, |d U^p| =]U^p[\; < \;]U[^p$$

Donc si $]U[< 1$ la série est normalement convergente et nous pouvons poser : $N^t = (1 + U)^t$

Il résulte des théorèmes sur les séries de cette forme que

$$N^{t+t'} = N^t N^{t'} \qquad N^{ct} = (N^t)^c$$

quels que soient les nombres réels t, t', c. Nous avons donc un procédé de définitions et de calculs de N^t pour tous les noyaux que l'on peut mettre sous la forme : $N = 1 + U$ avec $]U[< 1$.

Dans ce cas nous aurons : $\{N\} < \mathrm{Log}\, 2$. Réciproquement si $\{N\} < \mathrm{Log}\, 2$ nous aurons : $]N - I[< 1$.

Nous avons vu que si nous excluions de E un nombre fini de points nous pourrions trouver une répartition en classes sur les classes de laquelle nous avons : $\{N\} \leqslant \lambda$.

Nous supposerons désormais que $\lambda < \mathrm{Log}\, 2$ et nous dirons que tous les noyaux satisfaisant à $\{N\} \leqslant \lambda < \mathrm{Log}\, 2$ sont des noyaux réguliers.

Pour tous les noyaux réguliers il est possible de définir N^Z quel que soit Z. Cherchons à borner $\{N^Z\}$.

1/ - $|Z| < 1$. Nous avons

$$]N^Z - 1[\; = \;]ZU + \frac{Z(Z-1)}{2} U^2 + \dots [$$

$$\leqslant |Z| \,]U[+ \frac{Z \; Z-1}{2}]U[^2 + \dots$$

$$\leqslant |Z| \quad ( ]U (+) U (^2 + \dots)$$

$$\leqslant |Z| \frac{]U[}{1 -]U[}$$

Or $\{N^Z\} <]N^Z - I[$ donc $< |Z| \frac{]U[}{1 -]U[}$

2/ - 1 $\leqslant |Z|$. On peut poser : $Z = Z_o p$. (p entier)

$$\{N^{Z_o p}\} \leqslant \{(N^{Z_o})^p\} \leqslant \{p\ N^{Z_o}\} \leqslant p\,|Z_o| \frac{]U[}{1 -]U[} \leqslant |Z| \frac{]U[}{1 -]U[}$$

J'ai donc dans tous les cas :

$$\{N^Z\} \leqslant |Z| \frac{]U[}{(1 -]U[)\ \mathrm{Log}\ (1 +]U[)} \{N\}$$

Or quand Log $(1 +]U[)$ croît de 0 à $\lambda <$ Log 2

$\frac{]U[}{(1 -]U[)\ \mathrm{Log}\ (1 +]U[)}$ croît de 1 à $\frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda(2 - e^{\lambda})} = k$ et on a :

$$\{N^Z\} \leqslant K|Z|\ \{N\}$$

Or $K|Z|$ est une norme pour Z donc la norme pour N satisfait aux conditions du théorème IV-2 et par suite nous pouvons définir

$$\prod (N(t))^{Z(t)}$$

N étant une fonctionnelle π-multiplicative sur E prenant ses valeurs dans l'ensemble des noyaux réguliers, Z(t) étant une fonction semi-étagée. De même nous pouvons définir

$$\prod (N(t))^{dm(t)}$$

N étant une fonction prenant ses valeurs dans l'ensemble des noyaux réguliers et dm(t) étant une fonctionnelle σ-additive sur E.

CALCUL DU QUOTENTIEL -

Soit une fonctionnelle π-multiplicative sur un ensemble E nous désignerons respectivement par $\tilde{N}$; $\overset{M}{\tilde{N}}$ - $\overset{t_o\ t_1}{\tilde{N}}$ la fonctionnelle indéfinie et ses valeurs pour les ensembles M et $t_o < t < t_1$. Si nous supposons que $\tilde{N}$ est continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur E et que $\{\overset{M}{\tilde{N}}\} < \lambda$, nous pouvons définir le quotientiel de $\tilde{N}$.

Si nous posons $q(N) = \text{Lim}\ (\overset{M}{\tilde{N}})^{M-1}$ q(N) existera presque partout et on pourra le poser égal à : 1 + u(t). On aura :

$$\tilde{N} = \prod (q(N))^{dt}$$

$$^{t}\tilde{N}^{t+dt} = (q(N))^{dt} = 1 + dt\,U + dt\,\frac{dt - 1}{2}U^2 + \ldots$$

$$\frac{^{t}\tilde{N}^{t+dt} - I}{dt} = U + \frac{dt - 1}{2}U^2 + \ldots.$$

Quand $dt \longrightarrow 0$ le second membre tend vers Log (1 + U) donc on a:

$$\frac{^{t}\tilde{N}^{t+dt} - I}{dt} \longrightarrow V(t) \qquad \text{et} \qquad \tilde{N} = \prod e^{V(t)dt}$$

<u>Développement en série d'un noyau.</u>

Nous poserons par abréviation :

$$N(x, y) = \nu(x, y)dy$$

D'après le théorème de Lévy nous avons :

$$\nu(x, y) = \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(u-y)}\, \nu(x, y)du$$

$$= \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(u-x)}\, e^{i\ (x-y)}\, \nu(x, u)du$$

$$= \lim_{c \to \infty} \int_{-e}^{+c} \frac{e^{i\omega(x-y)}\,d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{0}^{+\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} (u - x)^n\, \nu(x, u)du.$$

Si : $\int_{-\infty}^{+\infty} (u - x)^n\, \nu(x, u)du = a_n(x)$ il vient :

$$\nu(x, y) = \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} \sum_{0}^{+\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} \frac{e^{i\omega(x-y)}}{2}\, a_n(x)d\omega$$

<u>Applications</u> :

1/ - Si N(x, y) = I.

$$a_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - x)^n\, dI(x, u) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

2/ - Si $N(x, y) = \dfrac{F(x, y) - I}{t}$

$$a_n(x) = \begin{cases} \dfrac{a_o - 1}{t} & n = 0 \\ \dfrac{a_n}{t} & n \neq 0 \end{cases}$$

<u>Application aux processus de Markoff</u> :

Nous poserons :

$${}^{t}\widetilde{F}^{t'} = \Pr\left\{X(t') \leqslant y \mid X(t) = x\right\}$$

Nous avons bien une fonctionnelle π-multiplicative car :

$${}^{t}\widetilde{F}^{t'} \quad {}^{t'}\widetilde{F}^{t''} = {}^{t}\widetilde{F}^{t''}$$

Si nous considérons : ${}^{t}\widetilde{F}^{t'}$ comme une fonction de t nous avons :

$$\frac{\partial\, {}^{t}\widetilde{F}^{t'}}{\partial t} = \operatorname{Lim} \frac{{}^{t_1}\widetilde{F}^{t'} - {}^{t_o}\widetilde{F}^{t'}}{t_1 - t_o}$$

Supposons $t_o < t$ pour fixer les idées

$${}^{t_o}\widetilde{F}^{t'} = {}^{t_o}\widetilde{F}^{t_1} \quad {}^{t_1}\widetilde{F}^{t'}$$

$$\frac{\partial\, {}^{t_o}\widetilde{F}^{t'}}{\partial t} = - \operatorname{Lim} \frac{{}^{t}\widetilde{F}^{t_1} - I}{t_1 - t_o} \quad {}^{t_1}\widetilde{F}^{t^1}$$

$$= - V(u, z).F(z, y)$$

en appelant z la variable auxiliaire d'intégration.

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} F(z, y) \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} \sum_{1}^{+\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} \frac{e^{i\omega(x-z)}}{2\pi} c_n\, d\omega\, dz$$

car $a_o = 1$ et en posant $c_n = \dfrac{da_n}{dt}$.

En intervertissant l'ordre des intégrations et des sommations nous avons

$$\frac{\partial\, {}^{t_o}\widetilde{F}^{t'}}{\partial t} = - \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} \sum \frac{C_n(x)}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(z, y)\, e^{i\omega(x-z)}}{2\pi} dz\, (i\omega)^n\, d\omega$$

Or d'après le théorème de Lévy :

$$f(x) = \lim_{c \to \infty} \int \frac{1}{2\pi} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-z)} f(z)dz$$

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} = \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} (i\omega)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-z)} f(z)dz$$

donc : $$\text{Lim.} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} (i\omega)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-z)} F(z, y)\, dz = \frac{\partial^n F(x, y)}{\partial x^n}$$

et par suite :

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t} = - \sum_{1}^{+\infty} \frac{C_n(x)}{n!} \frac{\partial^n F(x, y)}{\partial x^n}}$$

équation qui généralise la première équation de Kolmogoroff.

Si nous considérons F comme une fonction de t'

$$\frac{\partial F}{\partial t'} = \frac{{}^{t}\tilde{F}^{t_1} - {}^{t}\tilde{F}^{t_o}}{t_1 - t_o} = F(x, z)\, V(z, y)$$

en supposant $t_1 > t_o$ pour fixer les idées et en appelant z la variable auxiliaire d'intégration

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z)\, dz \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} \sum \frac{(i\omega)^n}{n!} e^{i\omega(z-y)} C_n(z)\, d\omega$$

$$= \sum \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} \frac{(i\omega)^n}{n!} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(z-y)} c_n(z)\, f(x, z)\, dz$$

posons : $\gamma_n = c_n(z)\, f(x, z)$

D'après le théorème de Lévy

$$\gamma_n(y) = \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(z-y)} \gamma_n(z)dz$$

$$\frac{\partial^n \gamma_n(y)}{\partial y^n} = \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} (-i\omega)^n \frac{1}{2\pi} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(z-y)} \gamma_n(z)dz.$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t'} = \sum \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n (c_n f)}{\partial y^n}}$$

équation qui généralise la deuxième équation de Kolmogoroff.

<u>Noyaux conjugués</u>.

Soit le noyau N(x, y) nous définirons les noyaux N^* et N° au

moyen des relations :

$$\frac{\partial N^*}{\partial v} = \operatorname{Lim}_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{-iux} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivy} \frac{\partial N}{\partial y} dy \qquad (1)$$

$$\frac{\partial N^\circ}{\partial v} = \operatorname{Lim}_{c \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx} dx \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{-ivy} \frac{\partial N}{\partial y} dy \qquad (2)$$

Il est clair que l'on a : $N^{*\circ} = N = N^{\circ *}$
donc si $A = B^*$ $B = A^\circ$
A et B sont dits noyaux conjugués.
On a manifestement :

$(\lambda N)^* = \lambda (N^*)$; $(N_1 + N_2)^* = N_1^* + N_2^*$

$\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)^* = \frac{\partial (N^*)}{\partial t}$ $(\lambda N)^\circ = \lambda (N^\circ)$

$(N_1 + N_2)^\circ = N_1^\circ + N_2^\circ$; $\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)^\circ = \frac{\partial (N^\circ)}{\partial t}$

Si l'on différencie (1) et (2) par rapport à u et v il vient :

$$\frac{\partial^2 N^*}{\partial v^2} = \operatorname{Lim}_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} e^{iux} dx \int_{-\infty}^{+\infty} (iy) e^{ivy} \frac{\partial N}{\partial y} dy = \frac{\partial (iyN)^*}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 N^*}{\partial u \partial v} = - \frac{\partial}{\partial v} (ixN)^*; \qquad \frac{\partial^2 N^\circ}{\partial v^2} = - \frac{\partial}{\partial v} (iyN)^\circ$$

$$\frac{\partial^2 N^\circ}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (ixN)^\circ$$

Soit à calculer $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^*$ nous aurons :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) = \operatorname{Lim}_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} e^{iux} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivy} \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} dy. \qquad (3)$$

Or : $$\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 (N^*)^\circ}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (iuN^*)^\circ$$

en portant dans (3) il vient :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) = \operatorname{Lim}_{c \to \infty} \int_{-c}^{+c} e^{iux} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivy} \frac{\partial}{\partial y} \left((iuN^*)^\circ\right) dy$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^* = \left((iuN^*)^\circ\right) = iuN^*$$

De la même façon on démontrerait

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^* = - ivN^*; \qquad \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^\circ = - iuN^\circ$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^\circ = ivN^\circ$$

Montrons que : $(N_1\ N_2)^* = N_1^*\ N_2^*$

$$\frac{\partial}{\partial W}(N_1 N_2)^* = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{+c}\frac{1}{2\pi}e^{iux}\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial N_1(x,y)}{\partial y}\,dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial N_2(y,z)}{\partial z}e^{iwz}\,dz$$

$$\frac{\partial}{\partial W}N_1^*\ N_2^* = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{+c}\frac{1}{2\pi}e^{iux}\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}dv\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial N_1(x,y_1)}{\partial y_1}e^{ivy_1}\,dy_1$$

$$\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{+c}\frac{1}{2\pi}e^{-ivy}\,dy_2\int\frac{\partial N_2(y_2,z)}{\partial z}e^{iWz}\,dz$$

Les deux expressions sont égales car :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial N_1(x,y)}{\partial y}\frac{\partial N_2(y_1 z)}{\partial z}\,dy_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}dv\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial N}{\partial y_1}e^{ivy_1}\,dy_1\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{+c}\frac{1}{2\pi}e^{ivy_2}\frac{\partial N_2}{\partial z}d$$

en effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dv\ e^{iv(y_1-y_2)}\quad\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{+c}\frac{1}{2\pi}\frac{\partial N_2(y_2,z)}{\partial z}\,dy_2 = \frac{\partial N_2(y_1,z)}{\partial z}$$

De même :

$$(N_1\ N_2)^\circ = N_1^\circ\ N_2^\circ$$

Les fonctionnelles définies par des noyaux conjugués sont conjuguées. On pourra donc chercher à appliquer la transformation au processus de Markoff et déterminer le processus conjugué. Dans la transformation les équations de Kolmogoroff deviennent des relations entre F^* et $\frac{\partial F^*}{\partial t}$. En posant pour simplifier : $F^*\ \varphi(u,\ v)$ il vient :

1/ - Pour la première équation de Kolmogoroff on peut écrire :

$$\frac{d\varphi(u,\ v)}{dt} = -\sum\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{+c}e^{-iux}\,dx\ \frac{C_n(x)}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial n\ \frac{\partial F}{\partial y}}{\partial x^n}e^{ivy}\,dy$$

avec $\text{Lim}\int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{-iu_1x} \quad dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial y} e^{ivy} dy = \varphi(u_1, v)$

$$\text{Lim}\int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{-iu_1x} \quad dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial n \frac{\partial F}{\partial y}}{\partial x^n} e^{ivy} dy = (iu)^n \varphi(u_1, v)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial n \frac{F}{y}}{\partial x^n} e^{ivy} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu_1x} \quad (iu)^n \varphi(u_1, v) du_1$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial t} = - \sum \text{Lim} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{+c} e^{iux} \frac{C_n(x)}{n!} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu_1x} \quad (iu_1)^n \varphi(u_1, v) du_1$$

en posant $g(u, u_1) = - \text{Lim} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{+c} e^{i(u_1 - u)x} \sum \frac{(iu_1)^n C_n(x)}{n!} dx$

il vient : $\frac{\partial\varphi(u v)}{\partial t} = \int g(u, u_1) \varphi(u_1 v) du_1$

Pour la deuxième équation :

$$\frac{\partial\varphi(u, v)}{\partial t} = \sum (iv)^n \left(f \frac{C_n}{n!}\right)^*$$

$$= \sum (iv)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivy} \frac{C_n(y)}{n!} dy \quad \underset{c \to \infty}{\text{Lim}} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{-iux} \frac{F}{\partial y} dx$$

$$= \sum (iv)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivy} \frac{C_n(y)}{n!} dy \quad \underset{c \to \infty}{\text{Lim}} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{2\pi} e^{-iv_1y} \varphi(u, v_1) dv_1$$

en posant :

$$h(v_1, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i(v - v_1)y} \sum \frac{(iv)^n C_n(y)}{n!} dy$$

il vient :

$$\frac{\partial\varphi(u, v)}{\partial t} = \underset{c \to \infty}{\text{Lim}} \int_{-c}^{+c} \varphi(u, v_1) h(v_1, v) dv_1$$

Dans le cas des processus à accroissements indépendants les C_n sont indépendants de x et les équations de Kolmogoroff deviennent la première

$$\boxed{\frac{\partial F^*}{\partial t} = -\sum \frac{C_n}{n!}(i\,u)^n F^*}$$

la deuxième

$$\boxed{\frac{\partial F^*}{\partial t'} = \sum \frac{C_n}{n!}(i\,v)^n F^*}$$

D'où $$\varphi = F^* = e^{\int_t^{t'} \sum_1^{+\infty} \frac{C_n}{n!}(iv)^n dt}$$

or :

$$\int_t^{t'} C_n(t)\,dt = a_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)^n \; {}^{t}\tilde{F}^{t'}$$

et $$\sum_1^{+\infty} \frac{a_n(iv)^n}{n!} = g - 1$$

g étant la fonction caractéristique de l'accroissement X du processus entre t et t + Δt.

On a donc en posant $\psi = \text{Log}\,\varphi$

$$\psi = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \sum (g-1) \quad \text{or} \quad g = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\,dp.$$

avec $$\int dp = 1 \qquad dp > 0$$

Pour nous ramener aux notations classiques nous remplacerons u par Z. Donc :

$$\begin{aligned}\psi &= \lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iZx} - 1)\,dp \\ &= \text{Lim} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iZx} - 1) \sum dp. \\ &= \text{Lim} \int \left(-2 \sin \frac{2xZ}{2} + i \sin xZ\right) \sum dp.\end{aligned}$$

Nous devons donc avoir quel que soit Z

$$\text{Lim} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{xZ}{2} \sum dp \qquad \text{convergent}$$

$$\text{Lim} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin xZ \sum dp \qquad \text{convergent}$$

mais comme étant donné $x \neq 0$ on peut toujours choisir Z de façon que $\sin \frac{XZ}{2} > \sum \operatorname{Lim} \sum dp$ ne pourra devenir infini que pour $x = 0$ donc les intégrales convergeront si et seulement si elles convergent au voisinage de 0 et de l'infini. En remplaçant les fonctions par leurs parties principales au voisinage de 0 on voit que cela exige :

$$\operatorname{Lim} \int_a^b x^2 \sum dp < K$$

$$\operatorname{Lim} \int_a^b x \sum dp < K'$$

au voisinage de l'infini on devra avoir

$$\int_{-\infty}^{a} dp + \int_{b}^{+\infty} dp < K''$$

On peut réunir toutes ces conditions en écrivant :

$$\operatorname{Lim} \int_{-\infty}^{x} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) \sum dp = g(x)$$

où g(x) est une fonction croissante (puisque $dp > 0$) est bornée et

$$\operatorname{Lim} \int_{-\infty}^{+\infty} 6 \frac{x - \sin x}{x^2} \sum dp = m$$

On peut transformer l'expression sous le signe somme de façon à pouvoir appliquer le théorème d'interversion des limites. Pour cela nous écrirons :

$$\psi = \operatorname{Lim} \int \left[\frac{-2 \sin^2 \frac{xZ}{2}}{1 - \frac{\sin x}{x}} + i \frac{\sin xZ - 6Z \frac{x - \sin x}{x^2}}{1 - \frac{\sin x}{x}} \right] \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) \sum dp$$

$$+ \int 6 i Z \frac{x - \sin x}{x^2} \sum dp.$$

Les expressions sous le signe somme étant maintenant toutes bornées nous pouvons appliquer le théorème d'interversion des limites et écrire :

$$\psi = m i Z + \int \frac{-2 \sin^2 \frac{xZ}{2} + i \left(\sin xZ - 6Z \frac{x - \sin x}{x^2}\right) dg}{1 - \frac{\sin x}{x}}$$

$$= m i Z + \int \mathcal{L}(Zx)\, dg.$$

en posant pour $\mathcal{L}(Z, x)$ (que nous appellerons la fonction de Loève) :

$$\mathcal{L}(Z, x) = \left(e^{iZx} - 1 - 6\, iZ\, \frac{x - \sin x}{x^2}\right) \frac{x}{x - \sin x}$$

Cette fonction de Loève vérifie l'identité :

$$\mathcal{L}(Z, x) - \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\mathcal{L}(Z + h, x) + \mathcal{L}(Z - h, x) \right] dh = e^{iZx}$$

on en déduit en posant :

$$\bar{\psi} = \psi(Z) - \frac{1}{2} \int_0^1 \psi(Z + h) + \psi(Z - h)\, dh$$

$$\bar{\psi} = \int e^{iZx} dg$$

La formule de Lévy nous donne donc :

$$g(x_1) - g(x_0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{Z \to +\infty} \int_{-Z}^{Z} \frac{e^{-iZx_0} - e^{-iZx_1}}{iZ}\, \bar{\psi}\, dZ$$

La fonction g est donc déterminée de façon unique quel que soit le mode de division de l'intervalle 0, t. miZ se déduit du premier terme du développement de ψ car $\int \mathcal{L}(Z, x)\, dg$ a son terme en Z de la forme: $iZ \int K(x)\, dg$.

$$i Z \int K(x)\, dg = m' iZ$$

m' étant bien déterminé par g. Nous avons donc démontré que si une variable aléatoire est la limite de sommes de variables aléatoires indépendantes en nombre aussi grand que l'on veut, la caractéristique seconde peut être mise d'une façon et d'une seule sous la forme :

$$\psi = miZ + \int \mathcal{L}(Z, x)\, dg$$

où m est une constante, $\mathcal{L}(Z, x)$ la fonction de Loève, g une fonction non décroissante et bornée.

Réciproquement si une fonction de ψ est de cette forme, c'est la limite de la caractéristique seconde d'une somme de variables aléatoires dont le nombre des termes augmente indéfiniment. En effet, on peut écrire :

$$\psi = \lim \sum_{A_i} \mathcal{L}(Z x_i)\, dg(A_i) + mZi \quad (x_i \in A_i)$$

Les A_i formant une suite de pavages convergent vers un pavage de Lebesgue.

Or, $\mathcal{L}(zx_i)\,dg(A_i)$ est la fonction caractéristique d'une variable poissonnière (zo) dg (o) + mzi est la fonction caractéristique d'une variable laplacienne. S'il n'existe qu'un nombre fini de $dg(A_i) \neq 0$ le raisonnement n'est pas infirmé. En effet, une variable poissonnienne peut être considérée comme somme d'un nombre arbitraire de variables poissonniennes de caractéristiques secondes

$$\frac{\mathcal{L}(z\,x_i)\,dg(A_i)}{n}$$

FONCTIONS ET FONCTIONNELLES PRENANT LEUR VALEUR SUR L'ENSEMBLE DES VARIABLES ALEATOIRES INDEFINIMENT DIVISIBLES -

J'appellerai V. A. I. D. toute variable aléatoire dont la caractéristique seconde est de la forme :

$$\psi = m\,i\,z + \int \mathcal{L}\,(z\,x)dg$$

où m est réel. $\mathcal{L}(zx)$ est la fonction de Loève, dg est une fonction bornée et croissante; norme de cette variable aléatoire l'expression :

$$|X| = \operatorname{Sup}\left(m, \int_{-\infty}^{+\infty} dg\right)$$

si X_1 et X_2 sont des V. A. I. D. indépendantes, $X_1 + X_2$ l'est également.

En effet, $\psi_1 + \psi_2$ est de la même forme.

$$|X_1 + X_2| = \operatorname{Sup}\left(m_1 + m_2, \int dg_1 + dg_2\right)$$

$$\leqslant \operatorname{Sup}\left(m_1, \int dg_1\right) + \operatorname{Sup}\left(m_2, \int dg_2\right)$$

$$\leqslant |X_1| + |X_2|$$

si $X_1 = X_2$ j'écrirai $(X_1 + X_2) = 2 * X_1$

et j'aurais : $2 * X_1 = 2\ |X_1|$

D'une façon plus générale, j'appelle $n * X$ la somme de n V.A.I. D. indépendantes et de même distribution que X. J'aurais comme caractéristique seconde n

$$|n * X| = n\ |X|$$

Enfin si étant donné $\lambda > 0$ je considère l'expression $\lambda\psi$, c'est la caractéristique seconde d'une V. A. I. D. Je poserais par définition :

$Y = \lambda * X$ et j'aurais : $|Y| = \lambda\,|X|$

La condition N et S pour qu'une V. A. I. D. X tende vers 0 est que $|X|$ tende vers 0.

Soit maintenant un ensemble classifié E. Je peux définir des fonctions x(t) sur E prenant leurs valeurs dans l'ensemble des V.A.I.D. Ces fonctions peuvent être étagées, semi-étagées. On peut également définir les fonctionnelles $Y = \int x(t)d$ pourvu que la mesure dm ne soit jamais négative. On aura pour $\psi(X)$ une expression où m et y sont des fonctions de t et pour $\psi(Y)$ une expression de la forme :

$$\psi(Y) = \int \psi\Big(X(t)\Big)dm$$

dans le cas particulier où x(t) est constant et où dm = dt

$$\psi(Y) = \psi(X) \int dt$$

Si t varie de 0 à t, nous aurons : $Y = t * X$

Soit une fonctionnelle Y sur E si $\frac{\partial\psi(Y)}{\partial t}$ est une V. A. I. D. c'est-à-dire si $\frac{\partial g}{\partial t} > 0$ quel que soit x, puisque :

$$\frac{\partial\psi(Y)}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial t} iZ + \int \mathscr{L}(Zx) \frac{\partial g}{\partial t}$$

Alors on peut poser : $\frac{\partial\psi(Y)}{\partial t} = \psi(X)$ et l'on aura : $X = \text{Lim} \frac{Y(t+\Delta t)-Y(t)}{\Delta t}$

On écrira : $X = \frac{\partial Y}{\partial t}$ d'où finalement : $\frac{\partial\psi(Y)}{\partial t} = \psi \frac{\partial Y}{\partial t}$.

Nous avons donc défini la dérivée d'un processus de Wiener-Lévy.

Autres exemples de processus de Markof.

Exemple I.

Supposons que la variable z' soit sensiblement équivalente à

$$z' = z(1+\lambda X)$$

λ étant une fonction de t et de dt qui tend vers zéro quand dt tend vers zéro et x une variable uniformément répartie entre 0 et 1. Dans ce cas l'application de la formule nous donne :

$$\frac{dm'}{dz'} = \int_{\frac{z'}{1+\lambda}}^{z'} \frac{1}{\lambda Z} \frac{dm}{dZ} dZ$$

Si nous posons $z = \frac{Z'}{1+\lambda}(1+u)$ $\quad 0 < u < \lambda \quad$ $\frac{dm}{dZ} = f(Z)$

Il vient :

$$\frac{dm'}{dZ'} = \int_0^{\lambda} \frac{1 + \lambda}{\lambda Z'(1+u)} \; f\left(\frac{Z'}{1+\lambda}\,(1+u)\right) \frac{Z'}{1+\lambda} \; du$$

en prenant un développement limite par rapport à u :

$$\frac{dm'}{dZ'} \# \int_0^{\lambda} \frac{1}{\lambda} \left[\left(f \; \frac{Z'}{1+\lambda}\right) + u\left(Z'f' \; \frac{Z'}{1+\lambda}\right) - f\left(\frac{Z'}{1+\lambda}\right)\right] du$$

en effectuant l'intégration il vient :

$$\frac{dm'}{dZ'} \# f\left(\frac{Z'}{1+\lambda}\right) + \frac{\lambda}{2} \left[Z'f'\left(\frac{Z'}{1+\lambda}\right) - f\left(\frac{Z'}{1+\lambda}\right)\right]$$

en prenant un développement limite premier ordre par rapport à

$$\frac{dm'}{dZ'} \# f(Z') - \frac{\lambda}{2} \left[f(Z') + Z'f'(Z') + \ldots\right]$$

en identifiant avec :

$$\frac{dm'}{dZ'} = \int N \, dm$$

nous voyons que au premier ordre :

$$N \# I(1 - \frac{\lambda}{2}) - \frac{\lambda Z'}{2} I'$$

dont le quotientiel de N est :

$$e^{-\frac{[illegible]}{[illegible]} \; [illegible]}$$

Or : $e^{-\frac{[illegible]}{2} [illegible]} = I + \ldots + \left(\frac{-Z'd\lambda}{2}\right)^n \frac{I^{(n)}}{n!} + \ldots$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(Z'-Z)} \sum_0^{+\infty} \frac{(i\omega)^n \left(-\frac{Z'd\lambda}{2}\right)^n}{n!} \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\left(Z' - Z - \frac{Z'd\lambda}{2}\right)} d\omega$$

$$= I\left(Z'\,(1 - \frac{d\lambda}{2}) - Z\right)$$

Donc : $\prod e^{-\frac{d\lambda}{2}(1+Z I')} = \prod e^{-\frac{d\lambda}{2}} I\left(Z' \prod (1 - \frac{d\lambda}{2}) - Z\right)$

$$= e^{-\int \frac{d\lambda}{2}} \; I\left(Z' e^{-\int \frac{d\lambda}{2}} - Z\right)$$

en posant $\frac{dm'}{dZ'} = g\,(Z')$

il vient: $g(Z') = e^{-\int \frac{d\lambda}{2}} f\left(Z' e^{-\int \frac{d\lambda}{2}}\right)$; $dm'(Z') = dm\left(Z' e^{-\int \frac{d\lambda}{2}}\right)$

Si Z est uniformément réparti entre 0 et 1, Z' sera uniformément réparti entre 0 et $e^{\int \frac{d\lambda}{2}}$. Il importe de remarquer que dans cet exemple Z' est égal en probabilité à $Z\, e^{\int \frac{d\lambda}{2}}$ donc que le processus est déterministe en probabilité.

Exemple II.

$$Z' = Z + a\, X\, dt$$

a est une fonction de t, X la variable qui prend la valeur 0 la probabilité $\frac{1}{2}$ et 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Un calcul analogue au précédent montre que

$$q(N) \# I - \frac{a}{2} I' \, dt$$

donc que

$$q(N) \# I(Z' - Z - \frac{a}{2} dt)$$

$$N = \prod I(Z' - Z - \frac{a}{2} dt)$$

$$= I(Z' - Z - \int \frac{a}{2} dt$$

Donc $g(z') = f(z' - \int \frac{a}{2} dt)$ avec la probabilité 1. Ici encore le processus est déterministe en probabilité.

Exemple III.

Plus généralement on a un processus presque prophétique, toutes

les fois que l'on a : $z' - z \sim dt\, h(z, t, y)$ h étant une fonction bornée.
En effet : $\int \frac{d\mu}{dy} \frac{dy}{dZ'}$, dm peut s'écrire en supposant y remplacé dans

$\frac{d\mu}{dy} \left(\frac{dh}{dy}\right)^{-1}$ par sa valeur en fonction de z' z t dt.

$$\int_{\Gamma} k\,(z', z, t, dt)\,\frac{1}{dt}\,dm$$

K étant une fonction qui ne tend pas vers zéro quand dt tend vers zéro.
D'autre part quand on exprime z en fonction de z' t y dt on a :

$$z = z' - u\,dt$$

u restant bornée puisque h est bornée. En prenant u comme variable u_1 et u_2 étant les limites d'intégration on a :

$$g(Z') \# \int_{u_1}^{u_2} K(Z', Z' - udt, t, dt)\, f(Z' - udt)du$$

en prenant le développement limite au premier ordre en dt

$$g(Z') \# \int_{u_1}^{u_2} K(Z', Z', t, 0)\, f(Z')\, du + dt \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial K}{\partial (dt)}\, f(Z')\, du$$

$$\left[\int_{u_1}^{u_2} (\frac{\partial K}{\partial Z}\, f(Z') + Kf'\,(Z')u\, du \right] dt$$

pour dt = 0 on doit avoir g(z') = f, donc :

$$\int_{u_1}^{u_2} K(Z', Z', t, 0)du = 1$$

et par suite on peut écrire :

$$q(N) \# I + dt(a\, I + bI')$$

$$N = e^{\int a\,dt} \prod I(z' - z + bdt) \qquad \text{avec :}$$

$$b = \frac{u_1^2(Z'\,t) - u_2^2(Z'\,t)}{2}\; K(Z', Z', t, 0)$$

Il y a donc la probabilité 1 pour que l'on ait à chaque instant

$$z' + b\,(z'\,d)\,dt = z$$

donc pour que l'on suive la trajectoire intégrale de l'équation différen-

tielle $\frac{dZ}{dt} + b(Z\ t) = 0$ qui passe par le point Z, t.

Variation d'un processus à accroissements indépendants.

Nous avons vu au premier chapitre que si des variables appartenaient à un même système on pouvait définir une relation d'ordre, un supremum et un infermum. Nous poserons pour simplifier :

$$\hat{Z} = \text{Sup}\ (0,\ Z)$$

$$\check{Z} = \text{Inf}\ (0,\ Z)$$

$$|Z| = \hat{Z} - \check{Z}$$

La soustraction est prise au sens de la soustraction des variables liées. Soit un processus à accroissements indépendants

$$Z = \int_0^t U(t) * dt$$

Soit une répartition en classes π de l'ensemble E des valeurs de t, P_j une classe de π et posons :

$$Y_j = \int_{P_j} U(t) * dt \ ; \qquad A_\pi = \sum_{P_j \in \pi} \hat{Y}_j$$

$$B_\pi = \sum_{P_j \in \pi} \check{Y}_j \ ; \qquad C_\pi = \sum_{P_j \in \pi} Y_j$$

Si nous remplaçons π par une interprétation plus fine π' et si nous formons A_π, B_π, C_π, nous avons :

$$A_\pi \leqslant A_{\pi'} \qquad B_\pi \geqslant B_{\pi'}$$

$$C_\pi \leqslant C_{\pi'}$$

En effet $Y_j = \sum Y_{j'}$ entraine :

$$\hat{Y}_J \leqslant \sum \hat{Y}_j \qquad \check{Y}_j \geqslant \sum \check{Y}_{j'}$$

$$|Y_J| \leqslant \sum |Y_{j'}|$$

Démontrons la propriété pour les Suprema. On démontrerait de la même façon les deux autres propriétés analogues.

1/ - Si l'on a $X_i = U + V_i$, la variable U étant indépendante des V_i, $\underset{i}{\text{Sup}}\ (v_i)$ est déterminé par la donnée des valeurs v_i des V_i. On peut

se fixer arbitrairement la valeur u de U ce qui déterminera les valeurs x_i des X_i et par conséquent $\sup_i (x_i)$. On aura entre ces diverses valeurs les relations :

$$\text{Sup } (x_i) = \text{Sup } (u + v_i) = u + \text{sup } (v_i)$$

On aura donc :

$$\text{Sup } (X_i) = U + \text{Sup } (V_i)$$

l'addition étant prise au sens de l'addition des variables aléatoires indépendantes.

2/ - $\text{Sup } (0, U, V, U + V) = \text{Sup } \quad \text{Sup } (0, U) + \text{Sup } (V, U + V)$

Or d'après le 1/ on a :

$$\text{Sup } (V, U + V) = V + \text{Sup } (0, U) = V + \widehat{U}$$

On a donc :

$$\text{Sup } (0, U, V, U + V) = \text{Sup } (\widehat{U}, V + \widehat{U})$$

D'après le 1/ on a encore :

$$\text{Up } (0, U, V, U + V) = \widehat{U} + \text{Sup } (0, V) = \widehat{U} + \widehat{V}$$

Si nous désignons par $\widehat{(U, V)}$ l'expression Sup (0,U,V,U+V), on a :

$$\widehat{(U, V)} = \widehat{U} + \widehat{V}$$

Raisonnons maintenant par récurrence pour étendre la relation au cas de n variables. Désignons par $(\widehat{U_j})_{j \leqslant n}$ l'expression $\text{Sup } (X_{i_n})$ les X_{i_n} étant toutes les expressions de la forme $\sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_{i_j} U_j$, ε_{i_j} étant égal à 0 ou à 1. Nous avons en mettant en évidence les X_i qui contiennent U_n avec un coefficient non nul :

$$\begin{aligned}(\widehat{U_j})_{j \leqslant n} &= \text{Sup } \left(\text{Sup } (X_{i_{n-1}}), \text{Sup } (X_{i_{n-1}} + U_n)\right) \\ &= \text{Sup } \left((\widehat{U_j})_{j \leqslant n-1}, \quad (\widehat{U_j})_{j \leqslant n-1} + U_n\right) \\ &= (\widehat{U_j})_{j \leqslant n-1} + \widehat{U}_n\end{aligned}$$

La propriété étant vraie pour n = 2 elle est vraie pour toute valeur de n et l'on a :

$$\Big(\widehat{U}_j \Big)_{j \leqslant n} = \sum_1^n \widehat{U}_j$$

Or on a visiblement

$$\widehat{\sum U_j} \leqslant (\widehat{U}_j) \quad \text{et par conséquent} \quad \widehat{\sum U_j} \leqslant \sum \widehat{U}_j$$

On a donc une suite croissante de A_π, décroissante de B_π, croissante de C_π. Si l'on montre que ces suites sont bornées (et il suffira de le montrer pour les C_π puisque $A_\pi \leqslant C_\pi$; $-B_\pi \leqslant C_\pi$) elles convergeront vers les variables aléatoires A, B, C que nous appellerons respectivement la variation positive, la variation négative et la variation totale de Z.

L'existence d'une borne supérieure pour les C_π est évidente pour les processus à accroissements positifs car dans ce cas $|Y_j| = Y_j$ et $C_\pi = Z$. Il y a également une borne supérieure lorsque le processus peut se mettre sous la forme d'une différence de deux processus à accroissements positifs car dans ce cas on a :

$$|V_j - W_j| \leqslant V_j + W_j$$

la soustraction étant prise au sens de l'addition d'une variable avec l'opposé d'une autre variable qui lui est indépendante. Soit le processus

$$Z(t) = \int_o^t U * dt$$

où t varie de 0 à 1 et où U est constant. Si les C_π relatifs à toutes les répartitions en classes de $0 \leqslant t \leqslant 1$ sont bornées, nous poserons :

$$(U) = \text{Sup } C_\pi.$$

Il existe une fonctionnelle additive $\gamma(M)$ définie par :

$$\gamma(M) = \text{Sup}\Big(\sum_{\cup P_j = M} |Y_j| \Big)$$

sur les réunions de classes des π_i. Nous avons :

$$M_1 \subset M_2 \Longrightarrow \gamma(M_1) < \gamma(M_2) \quad \text{et}$$

$$\gamma(M) < (U)$$

Si nous prenons pour π_i les répartitions où les classes sont de la forme $\frac{p}{n} < t \leqslant \frac{p+1}{n}$. Les Y_j ont la même distribution. Donc il en est de même

des Y_j et si l'on désigne par P_n l'une quelconque de ces n classes on a :

$$(U) = n * \gamma(P_n)$$

donc :

$$\gamma(P_n) = \frac{1}{n} * (U)$$

Si une suite d'ensembles M_i tend vers $\emptyset$ il est possible de trouver une suite de P_n avec n augmentant indéfiniment telle que tout M_i soit inclus dans un P_n, donc : $\gamma(M_i) < \frac{1}{n}$ $(U) \longrightarrow 0$ par conséquent la fonctionnelle est σ-additive et s'étend à toutes les parties classifiées de $0 \leqslant t \leqslant 1$. Nous avons de plus :

$$\gamma(M) = U * \int_M dt = \int_M U * dt \quad \text{et}$$

$$(U) = \lim_{n \to \infty} n * \left| \frac{1}{n} * U \right|$$

Considérons maintenant un processus pour lequel U(t) est une fonction étagée. Si pour toutes les valeurs U_i de U(t), (U_i) existe, nous pourrons définir de la même façon que précédemment une fonctionnelle $\gamma(M)$. Si chacun des ensembles N_i où U(t) est constant, on aura :

$$\gamma(M) = (U_i) * \int_M dt \qquad M \subset N_i$$

On a donc pour un ensemble M quelconque

$$\gamma(M) = \sum_i \gamma(M \cap N_i) = \sum \int_{M \cap N_i} (U_i) * dt$$

$$= \int_M (U_i) * dt$$

Si nous considérons maintenant un processus pour lequel U(t) est une fonction semi-étagée, on aura de la même manière par un passage à la limite une fonctionnelle :

$$\gamma(M) = \int_M \left(U(t)\right) * dt \text{ avec :}$$

$$\left(U(t)\right) = \lim_{n \to \infty} n * \left| \frac{1}{n} * U(t) \right|$$

De la même façon on peut définir la fonctionnelle

$$\alpha(M) = \int_M \widehat{U(t)} * dt$$

avec $\widehat{U(t)} = \lim_{n \to \infty} n * \frac{1}{n} \widehat{* U(t)}$

Si nous considérons la somme : $A_\pi = \sum \hat{Y}_j$ nous avons vu que l'on pou-

vait écrire : $A_{\pi} = \text{Sup}\ (X_i)$

les X_i étant toutes les variables de la forme :

$$X_i = \varepsilon_{ij}\ Y_j$$

avec ε_{ij} égal à 0 on a 1.

Quand nous passons à la limite il vient :

$$X_i = \int \varphi_{it}\, U(t) * dt.$$
$$= \int_{M_i} U(t) * dt$$

φ_{it} étant la fonction caractéristique d'ensemble de l'ensemble M_i. J'ai donc :

$$A = \operatorname*{Sup}_{M_i} \left(\int_{M_i} U(t) * dt \right)$$

J'aurai donc : $\int_{M_i} U(t) * dt \leqslant A.$

en particulier :

$$Z(t) \leqslant A \text{ puisque } Z(t) = \int_o^t U(t) * dt.$$

Si M est un ensemble de la forme $0 < t < t_o$ j'aurai cette inégalité quel que soit $t \in M$; par conséquent :

$$\operatorname*{Sup}_{t \leqslant t_o} Z(t) \leqslant \alpha(M)$$

Or $\operatorname*{Sup}_{t \leqslant t_o} Z(t)$ constitue un processus de sécurité au sens de Monsieur Daniel Dugué. Nous avons donc montré l'existence de ce processus toutes les fois que $\alpha(M)$ existe donc toutes les fois que U(t) peut être considéré comme la somme d'un processus à accroissements positifs et d'un processus à accroissements négatifs.

FONCTIONS ET FONCTIONNELLES PRENANT LEURS VALEURS DANS L'ENSEMBLE DES FONCTIONS SEMI-CARACTERISTIQUES -

J'appelle fonction semi-caractéristique une fonction g(v) de la variable complexe v.

1/ - Holomorphe et non nulle dans un disque D de rayon R et sur sa frontière C;

2/ - telle que g(0) = 1.

Il résulte de la définition que :

1/ - Les fonctions semi-caractéristiques forment un groupe multiplicatif.

2/ - $]g(v)[= \sup_{c} |\mathrm{Log}\, g|$ est fini.

De plus, on a : $]g_1 g_2[\leqslant]g_1[\,]g_2[$

car : $|\mathrm{Log}\, g_1 g_2| \leqslant |\mathrm{Log}\, g_1| + |\mathrm{Log}\, g_2|$ et $]g(mv)[\leqslant |m|\,]g(v)[$ pour $m \leqslant 1$.
car en posant $mv = v'$ quand v décrit C, v' décrit C' de rayon $|m|R$ et d'après le lemne de Schwartz :

$$\sup_{|v'| = |m|R} |\mathrm{Log}\, g(v')| \leqslant \frac{|m|R}{R} \sup_{|v'| = R} |\mathrm{Log}\, g(v')|$$

Si, en tout point E d'un ensemble classifié E on fait correspondre une fonction $g(v)$, on définit une fonction $h(t)$ prenant les valeurs dans l'ensemble des positions semi-caractéristiques. Les fonctions h peuvent être étagées ou semi-étagées.

Si on a une mesure $m(t)$ sur l'ensemble E et si l'on convient de prendre comme produit expotentiel $g^{m\cdot} = g(m\,v)$, ce qui est possible puisque :

$$(g_1 g_2)^{m\cdot} = (g_1 g_2)(m\,v) = g_1(m\,v)\; g_2(m\,v) = (g_1^{m\cdot})(g_2^{m\cdot})$$

$$]g^{m\cdot}[\leqslant]g[\, |m|$$

On peut définir une fonctionnelle multiplicative $\prod g_1^{dm\cdot}$. Pour calculer le quotientiel de la fonctionnelle essayons de la mettre sous la forme :

$$\prod g^{dm} = e^{\mathrm{Log} \prod g^{dm}} = e^{\mathrm{Log}\,(\mathrm{Lim} \prod_{A_i} g^{\Delta m})}$$

$$= e^{\mathrm{Lim} \sum \mathrm{Log}\; g^{\Delta m\cdot}} = e^{\mathrm{Lim} \sum \frac{\mathrm{Log}\; g^{\Delta m\cdot}}{\Delta m} \Delta m}$$

Quand Δm tend vers zéro $g^{\Delta m\cdot}$ tend vers 1 et :

$$\mathrm{Lim}\, \frac{\mathrm{Log}\,(v\Delta m)}{\Delta m} = \mathrm{Lim}\, \frac{g(v\Delta m) - 1}{\Delta m}$$

Soit h cette limite commune si elle existe.

$$\prod g^{dm} = e^{\mathrm{Lim}\sum h\,\Delta m} = e^{\int h\,dm} = \mathrm{Lim}\prod (e^{h})^{\Delta m}$$

Nous pouvons donc poser $q = e^{h}$ et écrire :

$$\prod g^{dm} = \prod (e^{h})^{dm} \quad \text{avec} \quad h = \frac{g(vdm) - 1}{dm}$$

Exemple :

Les fonctions g de la forme $g(v) = \int e^{ivh(x)}\,dp(x)$ où h (qui ne peut être complexe) est borné en module et où $\int dp(x) = 1$ $dp(x) > 0$ sont des fonctions semi-caractéristiques. En effet, si $|h| < k$ $|ivh| < kR$ et la partie réelle de ivh est inférieure à kR : $|g(v)| < e^{k}$.

Nous avons une condition suffisante pour que g(v) ne s'annule pas en écrivant que sa partie réelle n'est jamais nulle, ce qu'on peut assurer en écrivant que la partie réelle de e^{ivh} est positive.

Or, cette partie réelle vaut $|g(v)|$ cos I(ivh); pour assurer que cos I(ivh) est positif il suffit que :

$$I(ivh) < \frac{\pi}{2} \;;$$

ce qui est entraîné par : $|ivh| < \frac{\pi}{2} \qquad v < \frac{\pi}{2k}$

condition qui sera satisfaite pour tous les disques D de rayon $R < \frac{\pi}{2k}$.
Si les fonctions h_i d'une famille sont bornées dans leur ensemble, nous pouvons les considérer comme des fonctions semi-caractéristiques en prenant :

$$R < \frac{\pi}{2\,\mathrm{Sup}_i\,\mathrm{Sup}_x\, h\ (x)}$$

Si h(x) et dp varient en fonction de t, g(v) varie en fonction de t. Si g(v) est une fonction semi-étagée par rapport à t on peut définir la fonctionnelle multiplicative $\prod g^{dt}$. Pour avoir son quotientiel je calculerais :

$$H = \mathrm{Lim}\,\frac{g(v\Delta t) - 1}{\Delta t}$$

$$H = \mathrm{Lim}\;\frac{\int e^{ivh\,\Delta t}\,dp - 1}{\Delta t} = \mathrm{Lim}\int \frac{e^{iv\,\Delta t} - 1}{\Delta t}\,dp = \int \mathrm{Lim}\;\frac{e^{ivh\,\Delta t} - 1}{\Delta t}\,dp$$

$$= \int ivh\, dp \quad q = e^{\int ivh\, dp} = e^{iv\int h\, dp}$$

La fonctionnelle multiplicative peut également se mettre sous la forme :

$$\prod = e^{iv \iint h\, dp\, dt}$$

<u>Application</u> :

Considérons un processus à valeurs indépendantes et soit $X_o(t)$ la valeur prise par la fonction échantillon à l'instant t. Si nous formons les sommes :

$$Z_o = \sum e^{iux_o} \Delta t$$

$$Z = \sum e^{iux} \Delta t$$

Les Δt étant les mesures des classes d'une répartition de E et les x_o les valeurs prises pour x en un point quelconque de la classe. La fonction caractéristique de Z sera :

$$\Phi = \int \ldots \int e^{ivh} \prod dp_t = \prod \int e^{ive^{iux}\Delta t}\, dp_{dp_t}$$

Quand on prend des répartitions en classes de plus en plus fines qui engendrent une classification de Borel Φ converge vers $\prod g^{dt}$:

avec : $g = \int e^{ive^{iux}} dp$. De $q = e^{iv\int h\, dp}$ on tire : $\Phi = e^{iv\int \varphi\, dt}$ en posant :

$$\int e^{iux}\, dp = \varphi$$

La fonction caractéristique de X converge vers la fonction caractéristique du nombre certain $\int \varphi\, dt$ d'où X converge en probabilité vers $\int \varphi dt$. Cette intégrale ne dépend que de u et l'on a par conséquent en probabilité :

$$X_o = X = \int \varphi\, dt;$$

Or, X_o converge vers : $\int e^{iux_o(t)} dt$; donc on a en probabilité :

$$\int e^{iux_o(t)}\, dt = \int \varphi(u, t)\, dt$$

Nous pouvons développer les deux membres en série par rapport à u , ce qui donne :

- pour le premier : $\sum_0^{+\infty} (iu)^n \quad \int x_o(t)^n dt$

- pour le deuxième : $\sum_{0}^{+\infty} (iu)^n \int \mu_n(t)\,dt$ avec $\mu_n = \int x^n dp_t(x)$

On a donc en probabilité :

$$\int x_o(t)^n dt = \int dt \int x^n dp_t(x)$$

$$\int g\big(x_o(t)\big)dt = \int dt \int g(x)\, dp_t(x)$$

Si le processus est stationnaire dp_t est indépendant de t et égal à dp et l'on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dp = \frac{1}{t - t_o} \int_{t_o}^{t_1} g\big(x_o(t)\big)\, dt$$

Dans la pratique on remplacera $\int_{t_o}^{t_1} g\big(x_o(t)\big)\, dt$ par $\sum_i g(x_i)\,\overline{p}_i$, $\overline{p}_i$ étant la mesure de la classe qui contient x_i.

CHAPITRE VI

APPLICATION A UN PROBLÈME PRATIQUE DÉTERMINATION DU RENDEMENT D'UNE MACHINE A PAPIER

Une machine à papier est une machine qui transforme une solution de pâte à papier en papier. Son rendement est le rapport $\frac{p}{P}$ du poids p du papier obtenu au poids P de la pâte en solution. Il est intéressant de déterminer si ce rapport varie en fonction du temps afin de pouvoir remédier à un dérèglement éventuel de la machine. En fait ce rapport est peu différent de l'unité et il faut déceler s'il lui arrive de s'écarter de cette valeur.

On connait le poids du papier produit pendant un certain laps de temps ainsi que le volume de la solution employée.

Il suffira donc de déterminer comment varie la concentration de la solution en pâte au cours du temps. En effet le poids de la pâte employée pendant une certaine période est donnée par la formule :

$$P = \int_{t_o}^{t_1} c(t)\, dv(t)$$

Il n'est pas possible de déterminer à chaque instant la fonction c(t), les méthodes dont on dispose conduisant à détruire la pâte; il faudra donc faire des mesures de concentration à des instants donnés t_i aussi éloignés que possible les uns des autres afin de réduire autant qu'il se pourra le nombre de mesures. Nous nous proposons donc d'étudier le moyen de déterminer P avec le plus de précisions possible en faisant le minimum de prélèvements. Le volume de la pâte employée est une fonction monotone du temps; nous pourrons donc prendre le volume v comme variable et c deviendra une fonction de v. Cette fonction de v est déterminée par de multiples causes dont l'analyse est pratiquement impossible. Nous sommes donc amenés à la considérer comme une fonction-échantillon d'un processus stochastique. Nous pouvons faire

les hypothèses suivantes sur ce processus :

1/ - La loi de probabilité de $c(v)$ est indépendante de v.

2/ - Si la valeur de la fonction $c(v)$ est déterminée à l'instant t, la valeur de cette fonction quand v varie peu n'est pas indépendante de $c(v)$ mais en diffère peu. On peut considérer que les variations de $c(v)$ pour de faibles variations de v sont indépendantes. Si nous posons : $c(v_1) = x$, $c(v_2) = y$. Les différences $y - x$ sont indépendantes et $y - x$ est une fonctionnelle additive de v. D'après la théorie faite précédemment des fonctionnelles additives à valeur aléatoire nous pourrons écrire :

$$y - x = \int_{v_1}^{v_2} X(v, x) * dv$$

3/ - $X(v, x)$ est gaussien. Cette hypothèse peut se justifier physiquement en remarquant que les causes qui font varier la concentration sont nombreuses.

4/ - La concentration tend à s'établir au voisinage d'une valeur m et si $c(v_1)$ a une valeur x différente de m il y a une sorte de tendance de rappel qui a pour conséquence de donner à $c(v_2)$ une valeur moyenne plus proche de m que x. Pour de faibles variations de v cette valeur moyenne diffèrera x d'une quantité qui est sensiblement proportionnelle à $m - x$ et à $v_2 - v_1$; on la posera donc égale à $x + (m - x)\lambda dv$, λ étant une constante du dispositif précédant l'arrivée de la solution de pâte. On déterminera expérimentalement cette constante. Si l'on compare ce résultat à la formule :

$$c(v + dv) = c(v) + X(x, v) * dv$$

On voit que $\lambda(m - x)$ est la valeur moyenne de la variable $X(x, v)$. $X(x, v) - \lambda(m - x)$ est donc une variable gaussienne de valeur moyenne zéro. Nous admettrons que son écart-type ne dépend pas de x; nous la poserons donc égale à $X_v * \sigma(v)$.

En résumé nous pouvons donc écrire :

$$c(v + dv) = c(v) + \Big(m - c(v)\Big)\lambda dv + X_v * \sigma(v) dv \quad (E)$$

Cette égalité résume les conditions 2/, 3/, 4/. Il nous faut encore exprimer que $c(v)$ satisfait à la première condition.

INTEGRATION DE E -

Nous allons chercher à résoudre cette équation différentielle et à exprimer que la solution trouvée satisfait à la première condition. De plus nous voulons que la solution ait une valeur donnée certaine pour

$v = 0$. Nous poserons donc $c(0) = \gamma$. Dans ces conditions la fonction-échantillon $c(v)$ ne peut plus être prise arbitrairement parmi les solutions de l'équation différentielle. Etant donné que cette équation est linéaire nous pouvons supposer que la solution sera sans doute de la forme : $c(v) = \gamma f(v) + G(v)$, $G(v)$ étant une fonction qui ne dépendra que de m, λ, v et $\sigma(v)$.

D'autre part, toujours à cause de la linéarité de l'équation, nous pouvons supposer que G est de la forme :

$\int_0^v g(\theta, v) X_\theta * d\mu(\theta)$, θ étant une variable auxiliaire qui décrit l'intervalle 0, v; $g(\theta, v)$ et $d\mu(v)$ étant deux fonctions arbitraires que nous déterminerons par la suite de façon à obtenir une solution de l'équation différentielle.

Nous allons donc porter l'expression :

$$f(v) + \int_0^v g(\theta, v) X_\theta * d\mu(\theta)$$

dans l'équation différentielle et nous allons voir s'il est possible de déterminer $f(v)$, $g(\theta, v)$ et $d\mu(\theta)$ de façon à obtenir une solution de cette équation.

Il vient donc :

$$\gamma f(v+dv) + \int_0^{v+dv} g(\theta, v+dv)X_\theta * d\mu(\theta) = \gamma f(v) + \int_0^v g(\theta, v)X_\theta * d\mu(\theta)$$
$$+\left(m - \gamma f(v) - \int_0^v g(\theta, v)X_\theta * d\mu(\theta)\right)\lambda dv + X_v * \sigma dv$$

Or on peut écrire :

$$\int_0^{v+dv} g(\theta, v+dv)X_\theta * d\mu(\theta) = \left(\int_0^v g(\theta, v+dv)X_\theta * d\mu(\theta)\right)$$
$$+ g(v, v+dv)X_v * d\mu(v)$$

γ et $d\mu(\theta)$ étant manifestement indépendants de l'intégrale prise de 0 à v nous devrons avoir les relations :

(1) $\quad f(v + dv) = \gamma f(v) + \left(m - \gamma (v)\right)\lambda dv$

(2) $\quad g(\theta, v + dv)X_\theta * d\mu(\theta) = \left(g(\theta, v)X_\theta * d\mu(\theta)\right)(1 - \lambda dv)$

(3) $\quad g(v, v + dv)X_v * d\mu(v) = X_v * \sigma(v)dv$

En divisant l'équation (3) par dv et en faisant tendre dv vers zéro, il vient :

(4) $g(v,\ v)X_v * \frac{d\mu}{dv} = X_v * \sigma(v)$

X_v étant une variable normale de moyenne zéro et de variance 1, cette dernière équation revient à :

(5) $g(v,\ v)^2 \frac{d\mu}{dv} = \sigma\ (g)$

En intégrant l'équation (1) on trouve :

$$\gamma f(v) - m = A\ e^{-\lambda v}$$

Compte tenu de $f(0) = 1$ il vient : $A = \gamma - m$. En intégrant l'équation (2) il vient : $g(\theta,\ v) = B\ e^{-\lambda(v - \theta)}$. B étant une fonction de θ seul. En faisant $\theta = v$ dans cette équation il vient : $g(\theta,\ \theta) = B(\theta)$. En portant dans l'équation (5) il vient :

(6) $B^2(\theta) \frac{d\mu}{d\theta} = \sigma(\theta)$.

Nous avons donc résolu l'équation différentielle et trouvé comme solution :

(7) $c(v) = m + (\gamma - m)e^{-\lambda v} + \int_0^v e^{-\lambda(v-\theta)}\ B(\theta)X_\theta * \frac{d\mu}{d\theta}\ d\theta$

$\sigma(\theta)$, $B(\theta)$ et $\frac{d\mu}{d\theta}$ étant liés par la relation (6).

Nous devons maintenant choisir $B(\theta)$, $\sigma(\theta)$ et $\frac{d\mu}{d\theta}$ de façon à satisfaire à la première condition. Pour cela nous supposerons que γ est une variable aléatoire dont les cumulants sont donnés μ_i ; il devra en résulter que c(v) est une variable aléatoire de même cumulant μ_i . Nous aurons donc : $\mu_1 = m + (\mu_1 - m)\ e^{-\lambda v}$.

Cette égalité ne peut être satisfaite quel que soit v que si $\mu_1 = m$.

$$\mu_2 = \mu_2\ e^{-2\lambda v} + \int_0^v e^{-2\lambda(v-\theta)}\ B^2(\theta) \frac{d\mu}{d\theta}\ d\theta$$

ce qui peut s'écrire également :

$$\mu_2\ (e^{2\lambda v} - 1) = \int_0^v e^{2\lambda\theta}\ B^2(\theta) \frac{d\mu}{d\theta}\ d\theta$$

En dérivant par rapport à v, il vient :

(8) $2\lambda\mu_2 = B^2(v) \frac{d\mu(v)}{dv}$ $\qquad \mu_n = \mu_n\ e^{-n\lambda v}$

Cette égalité ne peut être satisfaite quel que soit v que pour $\mu_r = 0$. Il s'ensuit que γ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne m et de variance s constante. On peut écrire (8) quel que soit v donc en particulier pour $v = \theta$ ce qui nous donne compte tenu de (6) $2\lambda s = \sigma(\theta)$.

En remplaçant $\frac{d\mu}{d\theta}$ par sa valeur dans (7) il vient :

(9) $$c(v) = m + (\gamma - m)\, e^{-\lambda v} + \int_0^v e^{-\lambda(v-\theta)}\, B(\theta)\, X_\theta * \frac{2\lambda s}{B^2(\theta)}\, d\theta$$

Comme X_θ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle on a :

$$B(\theta)\, X_\theta * \frac{1}{B^2(\theta)} = X_\theta$$ et (9) devient :

(10) $$\boxed{c(v) = m + (\gamma - m)\, e^{-\lambda v} + \int_0^v e^{-\lambda(v-\theta)}\, X_\theta * 2\lambda s\, d\theta}$$

Si nous formons maintenant l'intégrale A(u) :

$$A(u) = \int_0^u c(v)\, dv$$

Nous obtiendrons une variable aléatoire liée aux variables X_θ, nous pourrons l'exprimer en fonction des X_θ au sens de la théorie des variables fortement liées et en intégrant ensuite au sens de la théorie des variables indépendantes. Il vient donc :

$$\boxed{A(u) = m\left(u + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u} - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{\gamma}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda u}\right) + \int_0^u \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda(u-\theta)}\right) X_\theta * 2\lambda s\, d\theta}$$

A(u) sera donc une variable obéissant à la loi de Gauss de moyenne :

$$m\left(u + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u} - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{\gamma}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda u}\right)$$

et de variance : $\int_0^u \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda(u-\theta)}\right)^2 2\lambda s\, d\theta = \frac{2s}{\lambda}\left[u - \frac{2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda u}) + \frac{1}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda u})\right]$

Il vient donc : $m_A = m u\left(1 + \frac{1}{\lambda u} e^{-\lambda u} - \frac{1}{\lambda u}\right) + \gamma u \left(\frac{1 - e^{-\lambda u}}{\lambda u}\right)$

$$\sigma_A = 2 s u^2 \frac{1}{\lambda u}\left[1 - \frac{2}{\lambda u}\left(1 - e^{-\lambda u}\right) + \frac{1}{2\lambda u}\left(1 - e^{-2\lambda u}\right)\right]$$

Nous avons donc obtenu ainsi une estimation du poids de pâte et de l'erreur probable sur ce poids quand on connaît la concentration à l'instant initial de la solution et le volume de cette solution.

CALCUL PRATIQUE DE L'INTEGRALE -

Remarquons que si λu augmente indéfiniment ou est très grand, c'est-à-dire si l'on évalue le poids p au cours d'une période suffisamment grande (c'est l'expérience qui en fixant la valeur de λ déterminera ce que l'on peut appeler une longue durée) les formules deviennent, au premier ordre près,

$$m_A = \left(m + \frac{\gamma - m}{\lambda u}\right)u \; ; \qquad \sigma_A^{} = \frac{2su^2}{\lambda u}$$

Pour λu quelconque on commet une erreur assez importante sur l'appréciation de p. Nous allons voir ce que l'on peut réduire de façon très sensible l'importance de cette erreur en effectuant des mesures de la concentration pour des volumes de solutions intermédiaires :

$$v_o = 0 \qquad v_1 = \frac{u}{n} \quad \ldots \quad v_p = \frac{pu}{n} \qquad p \leqslant n - 1$$

En effet nous pouvons appliquer les formules trouvées précédemment à chacun des intervalles ainsi déterminés et il vient :

$$\int_o^{\frac{u}{n}} cdv = m\left(\frac{u}{n} + \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\lambda u}{n}} - \frac{1}{\lambda}\right) + \gamma_o\left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}}\right)\frac{1}{\lambda}$$

$$+ \int_o^{\frac{u}{n}} \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\left(\frac{u}{n} - \theta\right)}\right) X_\theta * 2\lambda s \; d\theta$$

$$\int_{\frac{u}{n}}^{\frac{2u}{n}} edv = m\left(\frac{u}{n} + \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\lambda u}{n}} - \frac{1}{\lambda}\right) + \gamma_1\left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}}\right)\frac{1}{\lambda}$$

$$+ \int_o^{\frac{u}{n}} \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\left(\frac{u}{n} - \theta'\right)}\right) X_{\theta' + \frac{u}{n}} \; 2\lambda s \; d\theta'$$

En additionnant ces n égalités il vient :

$$B(u) = n\,m\left(\frac{u}{n} + \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\lambda u}{n}} - \frac{1}{\lambda}\right) + \sum_o^{n=1} \gamma_i \left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}}\right)\frac{1}{\lambda}$$

$$\left(\int_o^{\frac{u}{n}} + \quad \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\left(\frac{u}{n} - \theta\right)}\right) X_\theta * 2\lambda s \, d\theta\right) * n$$

B(u) a pour valeur moyenne :

$$m\left(u + \frac{n}{\lambda} e^{-\frac{\lambda u}{n}} - \frac{n}{\lambda}\right) + \sum_o^{n=1} \gamma_i \left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}}\right)\frac{1}{\lambda}$$

ce que l'on peut écrire également

$$m_B = mu\left[1 + \frac{n}{\lambda u}\left(e^{-\frac{\lambda u}{n}} - 1\right)\right] + \left(\frac{\sum_{o}^{n=1} Y_i}{n}\right)u\left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}}\right)\frac{n}{\lambda u}$$

B(u) a pour variance :

$$\sigma_B = \frac{2s}{\lambda}\left[u - \frac{2n}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}}\right) + \frac{n}{2\lambda}\left(1 - e^{-\frac{2\lambda u}{n}}\right)\right]$$

ce que l'on peut écrire également :

$$\frac{2su^2}{n}\left[\frac{n}{\lambda u} - 2\left(\frac{n}{\lambda u}\right)^2\left(1 - e^{-\frac{\lambda u}{n}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\lambda u}\right)^2\left(1 - e^{-\frac{2\lambda u}{n}}\right)\right].$$

En posant : $M = mu$

$$C = \frac{\sum_{o}^{n=1} Y_i}{n}u \qquad S = \frac{su^2}{n} \qquad a = \frac{\lambda u}{n}$$

Ces expressions deviennent :

$$m_B = M\left(1 + \frac{e^{-a} - 1}{a}\right) + C\left(\frac{1 - e^{-a}}{a}\right)$$

$$\sigma_B = 2S\left[\frac{1}{a} - \frac{2}{a^2}(1 - e^{-a}) + \frac{1}{2a^2}(1 - e^{-2a})\right] = 2Sy$$

en posant :

$$y = \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2}(1 - e^{-a}) + \frac{1}{2a^2}(1 - e^{-2a})$$

La fonction de y de a est continue et bornée. En effet quand a tend vers zéro, y est équivalent à a.

Si nous formons la dérivée y'_a il vient :

$$y'_a = -\frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^3}e^{-a} - \frac{2}{a^2}e^{-a} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3}e^{-2a} + \frac{1}{a^2}e^{-2a}$$

y'_a s'annule pour :

$$e^{-2a} - 4e^{-a} + 3 + a(e^{-2a} - 2e^{-a} - 1) = 0 \qquad a > 0$$

Une résolution graphique de cette équation montre qu'elle n'a qu'une seule racine comprise entre 0 et 3. La fonction y passe donc

par un maximum pour une valeur a_o inférieure à 3.

Or on voit facilement que $y < a$ par conséquent le maximum de y est inférieur à $a_o < 3$.

Nous avons donc $\sigma_B < 6\ S = 6\ \frac{su^2}{n}$.

Si nous voulons que σ_B soit inférieur à un nombre donné k, s et u étant fixes, il nous suffira de prendre n suffisamment grand. A ce moment

$a = \frac{\lambda u}{n}$ sera déterminé et en portant a dans l'expression de m_B on aura

une estimation de p avec une erreur probable inférieure à k. Cette erreur pourra même être très inférieure à k si a est très grand ou très petit puisque y tend vers zéro quand a tend vers zéro ou vers l'infini. Le problème est donc résolu du point de vue théorique; du point de vue pratique il nous reste à déterminer les valeurs de m, s et λ. Voici comment nous procèderons :

Si nous considérons la relation entre c(v) et c(v + h)

$$c(v + h) = m + \left(c(v) - m\right)e^{-\lambda h} + \int_0^h e^{\lambda(h-\theta)}\ X_\theta * 2\lambda s\ d\theta$$

Nous voyons que si h est suffisamment grand, les variables c(v) et c(v + h) son pratiquement indépendantes. Il s'ensuit que si l'on prend des mesures de c à des intervalles très éloignés nous aurons des échantillons de variables aléatoires gaussiennes de moyennes m et de variances s ce qui nous donne suivant la théorie classique le moyen d'estimer m et s par les formules :

$$m = \frac{1}{q}\sum_1^q c$$ q étant le nombre d'échantillons

$$s = \frac{1}{q-1}\sum_1^q (c_i - m)^2$$

Si au contraire nous prenons une faible valeur de h il y a une forte corrélation entre c(v + h) et c(v). En prenant des valeurs de v très éloignées les unes des autres et en conservant une valeur constante et faible de h tout se passe comme si nous avions des échantillons d'une variable aléatoire $X_1 = c(v) - m$ et des échantillons d'une variable aléatoire : $X_2 = c(v + h) - m$, ces deux variables aléatoires étant liées par la relation $X_2 = X_1\ e^{-\lambda h} + X_3$

X_3 étant égal à : $\int_0^h e^{-\lambda(h-\theta)}\ X_\theta * 2\lambda s\ d\theta$

La variable X_3 est indépendante de la variable X_1 et par conséquent :

$$X_2 X_1 = X_1^2 e^{-\lambda h} + X_1 X_3^2 = X_1 e^{-\lambda h}$$

Par conséquent $e^{-\lambda h}$ est égal au coefficient de corrélation ρ entre X_1 et X_2. $\lambda = -\frac{1}{v}$ Log ρ. Au cours d'une série de mesures effectuées dans une papeterie, la valeur de ρ trouvée pour $h = 8\ m^3$ a été $\rho = 0,51$.

D'où : Log $\rho = -0,674$. $\lambda = 0,084$ par m^3

Nous pouvons considérer que les concentrations $c(v + h)$ et $c(v)$ sont indépendantes pour $e^{-\lambda h} < 1\%$ ce qui nous donne $h > 50\ m^3$.

Dans la même usine, le rapport $\frac{\sqrt{s}}{n}$ vaut 0,087. Si nous voulons faire une erreur probable sur m inférieure à 1%, l'application de la seconde nous donnera le résultat quel que soit u en prenant n tel que $0,087 \sqrt{\frac{6}{n}} < 1\%$.

D'où $n > 365$.

Le nombre des échantillons à prélever et des mesures à faire est donc très élevé mais on peut réduire le travail du moins en ce qui concerne les mesures en remarquant que celles-ci n'interviennent que par leur somme.

Il suffit donc de prendre les échantillons de même volume et de les ajouter, avant la mesure. La teneur en pâte de la réunion étant la somme des teneurs en pâte des échantillons.

Mais il est possible également de réduire le nombre des échantillons à prendre compte tenu du volume de solution. Supposons par exemple que nous ayons pris $u = 500\ m^3$, pour assurer une erreur relative probable $< 1\%$, nous devrons avoir $\frac{n}{y} > 122$, c'est-à-dire :

$$ay < \frac{500 \times 0,084}{122}$$

ce que nous assurerons en prenant $ay < \frac{1}{3}$.

$$1 - \frac{2}{a}(1 - e^{-a}) + \frac{1}{2a}(1 - e^{-2a}) < \frac{1}{3}$$

en résolvant l'équation :

$$1 - \frac{2}{a}(1 - e^{-a}) + \frac{1}{2a}(1 - e^{-2a}) = \frac{1}{3}$$

nous trouvons $a \neq 1,9$ $n > 22$

Remarquons que pour de grands volumes nous pouvons nous contenter des formules donnant m_A et σ_A ; pour avoir une erreur probable inférieure à 1% nous devons prendre

$$\frac{\sqrt{2\ s}}{m\ \sqrt{\lambda u}} < 1\%$$

$\lambda u > 2 \times (8,7)^2 = 122$ $u > 1.500\ m^3$

Nous vérifions a posteriori que la valeur de λu est suffisamment grande pour légitimer l'utilisation des formules approchées.

BIBLIOGRAPHIE

A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET - Théorie des fonctions aléatoires. Collection d'ouvrages de Mathématiques à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. DARMOIS. Masson éditeur.

D. DUGUE - Deux notions utiles en statistique mathématiques : les ensembles aléatoires bornés "en loi" et la continuité fortement uniforme en probabilité.
Colloque sur l'Analyse Statistique tenu à Bruxelles les 15-16-17 Décembre 1954 - p. 133-141.

M. GIRAULT - Les fonctions caractéristiques et leurs transformat
Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris. Volume IV, Fascicule 4, 1955 - Editeur Sennac.

P. LEVY - Théorie de l'addition des variables aléatoires.
Monographies des probabilités publiées sous la direction de E. BOREL
Gauthier-Villars Imprimeur Editeur.

C. PAUC - Dérivé et intégrants - Fonction de cellule.
Cours de Varenna.

A. PREKOPA - On stochastic set functions.
Acta Mathematica - Acad. Scientiarum Hungarical
T me VII Fascicule 2 p. 215-263.

A. REVUZ - Fonctions croissantes et mesures sur les espaces topologiques ordonnés.
Chartres Imp. Durand - 1954 - in 8° - 88 pages.
(Th. Sc. Math. Paris - 1954 - série A - 2 666 N° 3 538).

TABLE DES MATIÈRES

UN PROBLÈME DE TEMPS D'ATTEINTE

Par A. FUCHS

Considérons une chaîne de Markoff discrète, homogène dans le temps à un nombre fini r d'états. Désignons par P^n_{ij} ; i, j = 1, ..., r; n = 0, 1, 2. la probabilité pour que le système passe de l'état i à l'état j en n épreuves consécutives. Pour n fixé les P^n_{ij} sont les éléments de la matrice P^n, n-ième puissance matricielle de la matrice $P^1 = P$ des probabilités de passage en une épreuve.

I - TEMPS D'ATTEINTE (1) -

Soit G un ensemble quelconque d'états. Supposons qu'à l'instant $n \geqslant 0$ le système soit dans l'état i faisant ou non partie de G et soit $T_i(G)$ l'entier > 0 tel que $n + T_i(G)$ soit le premier instant pour lequel le système prend un état de G. La chaîne étant supposée homogène dans le temps, $T_i(G)$ ne dépend pas de n :

DEFINITION 1 :

La variable aléatoire $T_i(G)$ s'appelle le temps d'atteinte de G à partir de i.

Notons que $T_i(G)$ peut prendre la valeur $+\infty$ avec probabilité $\alpha > 0$. Si par exemple $i \in$ groupe final $\not\ni G$, $T_i(G) = +\infty$ avec probabilité $\alpha = 1$. L'éventualité $\alpha > 0$ est exclue dans la définition classique d'une variable aléatoire.

La notion de temps d'atteinte est surtout intéressante lorsque G est un groupe final. Nous traiterons en détail le cas particulier où G

---

(1) A BLANC-LAPIERRE et R. FORTET
Théorie des Fonctions aléatoires (Masson) p. 222.

est un groupe final réduit à un seul élément, soit j. L'état j est alors un état absorbant et l'on a par définition $P_{jj} = 1 \Rightarrow P^n_{jj} = 1$ quel que soit l'entier $n \geqslant 0$.

On désignera alors $T_i(G)$ par T_{ij} = temps d'atteinte de j à partir de i.

II - LOI DE PROBABILITE DE T_{ij} -

Par définition T_{ij} est une variable aléatoire qui peut prendre toutes les valeurs entières $\geqslant 1$, dans certains cas, la valeur $+\infty$.

Posons :

$$Q^n_{ij} = P\left\{T_{ij} = n\right\} \qquad n \geqslant 1 \qquad (1)$$

Q^n_{ij} est la probabilité pour que, partant de i on arrive en j pour la première fois après n épreuves consécutives.

Si l'on pose $q_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} Q^n_{ij}$, on a nécessairement $0 \leqslant q_{ij} \leqslant 1$ et les formules (1) ne définissent la loi de probabilité de T_{ij} que si $q_{ij} = 1$. Dans le cas contraire on dira par convention que T_{ij} prend la valeur $+\infty$ avec probabilité $1 - q_{ij} > 0$.

Placons-nous dans le cas régulier, c'est-à-dire, dans le cas où, lorsque $n \to \infty$, P^n_{ij} tend vers une limite π_j indépendante du premier indice i. On a alors $\lim_{n \to \infty} P^n_{ij} = \pi_j$ et l'on montre que la limite π_j est atteinte exponentiellement. Si en outre j est un état absorbant, $\pi_j = 1$.

THEOREME I -

Dans le cas régulier et si j est un état absorbant, $q_{ij} = 1$ quel que soit $i = 1, \ldots, r$ de sorte que les formules (1) définissent la loi de probabilité de T_{ij}.

On a en effet (cf. (1))

$$q_{ij} = \lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} P^n_{ij}}{1 + \sum_{n=1}^{N} P^n_{jj}}$$

Or, par hypothèse $P^n_{jj} = 1$ quel que soit $n \geqslant 1$ et $\lim_{n \to \infty} P^n_{ij} = \pi_j = 1$ quel que soit $i = 1, \ldots, r$. Le théorème en résulte.

----

(1) M. LOEVE : Probability Theory P. 31.

III - ESPERANCE MATHEMATIQUE DE T_{ij} -

Si $q_{ij} = 1$ nous définissons le temps d'atteinte moyen de j à partir de i par :

$$M_{ij} = E\left\{T_{ij}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} n \; Q_{ij}^{n}$$

Nous allons voir que dans le cas régulier et si j est un état absorbant, la quantité M_{ij} est finie quel que soit i = 1, . . . , r et nous allons indiquer un moyen simple pour la calculer explicitement.

Il résulte immédiatement des définitions que l'on a :

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{n} Q_{ij}^{k} \; P_{jj}^{n-k} \quad \text{avec } P_{jj}^{0} = 1 \qquad (2)$$

Dans le cas où j est un état absorbant, cette relation se déduit à :

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{n} Q_{ij}^{k} \qquad (2')$$

d'où

$$\begin{cases} Q_{ij}^{1} = P_{ij} \\ Q_{ij}^{n} = P_{ij}^{n} - P_{ij}^{n-1} \qquad n \geqslant 2 \end{cases}$$

Pour calculer M_{ij} on commence par former :

$$\sum_{n=1}^{N} n\, Q_{ij}^{n} = Q_{ij}^{1} + \sum_{n=2}^{N} n\, Q_{ij}^{n} = P_{ij} + \sum_{n=2}^{N} n \left[P_{ij}^{n} - P_{ij}^{n-1}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} n\, P_{ij}^{n} - \sum_{n=2}^{N} n\, P_{ij}^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} n\, P_{ij}^{n} - \sum_{\nu=1}^{N-1} (\nu + 1)\, P_{ij}^{\nu}$$

$$= N\, P_{ij}^{N} - \sum_{\nu=1}^{N-1} P_{ij}^{\nu}$$

$$= P_{ij}^{N} + N\, P_{ij}^{N} - \sum_{\nu=1}^{N} P_{ij}^{\nu}$$

$$= P_{ij}^{N} + N\left[P_{ij}^{N} - \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} P_{ij}^{\nu}\right]$$

$$= P_{ij}^{N} + N\left[P_{ij}^{N} - \overline{P}_{ij}^{N}\right]$$

en désignant par $\overline{P}^N_{ij}$ la moyenne arithmétique $\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} P^{\nu}_{ij}$

Supposons à présent que l'on soit dans le cas régulier ; π_j ayant la signification de tout à l'heure, on á :

$$\sum_{n=1}^{N} n\, Q^n_{ij} = P^N_{ij} + N \left[(P^N_{ij} - \pi_j) + (\pi_j - \overline{P}^N_{ij}) \right]$$

Or, lorsque $N \to \infty$, $P^N_{ij} - \pi_j$ tend vers 0 exponentiellement ; il en résulte que dans les mêmes conditions $N \left[P^N_{ij} - \pi_j \right] \longrightarrow 0$ d'où :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} n\, Q^n_{ij} = \pi_j + \lim_{N \to \infty} N \left[\pi_j - \overline{P}^N_{ij} \right] \\ &= 1 + \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \left[\pi_j - P^n_{ij} \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pi_j - P^n_{ij} \right] \end{aligned}$$

Or, $\pi_j - P^n_{ij}$ tendant vers 0 exponentiellement, la série de terme général $\pi_j - P^n_{ij}$ est absolument convergente, donc convergente.

D'autre part, dans la théorie du cas régulier (cf. (1)) interviennent les quantités $s_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[P^n_{ij} - \pi_j \right]$. Nous venons de voir que si j est un état absorbant, les M_{ij} sont liés aux s_{ij} par les relations :

$$M_{ij} = 1 - s_{ij} \tag{3}$$

qui donnent une interprétation simple des s_{ij} dans les conditions indiquées.

THEOREME 2 -

Dans le cas régulier et si j est un état absorbant, le temps d'atteinte moyen M_{ij} de j à partir de i est fini quel que soit $i = 1, \ldots, r$ et l'on a $M_{ij} = 1 - s_{ij}$, s_{ij} étant donné par $s_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[P^n_{ij} - \pi_j \right]$.

IV - CALCUL EXPLICITE DES M_{ij} -

On montre (cf. (1)) que les s_{ij} sont les solutions uniques du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} s_{ij} - \left[P_{ij} - \pi_j \right] = \sum_{l=1}^{r} s_{il} P_{lj} & i, j = 1, \ldots, r \\ \sum_{l=1}^{r} s_{il} = 0 & i = 1, \ldots, r \end{cases} \tag{4}$$

On en déduit les M_{ij}

----

(1) M. FRECHET : Récherches théoriques et modernes sur le Calcul des Probabilités, Livre II, p. 46.

V - EXEMPLE -

Une urne contient des boules de r couleurs différentes dans les proportions $\frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}$. Une épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans l'urne et à la remettre après l'opération. On procède à une succession indéfinie d'épreuves.

On demande le nombre moyen d'épreuves qu'il faut effectuer pour trouver pour la première fois, parmi les boules tirées, des représentants de chacune des r couleurs.

Nous allons voir que ce problème s'intègre tout naturellement dans la théorie générale que nous venons d'esquisser.

On dira qu'à l'instant n on est dans l'état k ($0 \leqslant k \leqslant r$) si dans l'intervalle $[0, n]$ on n'a tiré que des boules de k couleurs différentes. La succession des états dans lesquels on se trouve aux instants 0, 1, 2, . . définit alors une chaîne de Markoff discrète homogène dans le temps à r + 1 états. Si l'on écrit les états dans l'ordre 0, 1, ... , r, la matrice des probabilités de passage en une épreuve est

$$P = \{P_{ij}\} \begin{cases} P_{ii} = \dfrac{i}{r} & i = 0, 1, \ldots, r \\ P_{i,i+1} = \dfrac{r-i}{r} & i = 0, 1, \ldots, r-1 \end{cases} \qquad (5)$$

tous les autres éléments étant nuls.

L'état r est manifestement un état absorbant ($P_{rr} = 1$) ; en outre tous les autres états sont des états de passage : en effet si $k \in [0, r-1]$, $k+1$ est conséquent de k alors que k n'est par conséquent de k + 1. On en conclut que l'on est dans le cas régulier et que

$$\lim_{n \to \infty} P^n_{ij} = \pi_j = \begin{cases} o, & j \in [o, r-1] \\ 1, & j = r \end{cases}$$

Le problème posé revient donc à calculer le temps d'atteinte moyen M_{or} de l'état r à partir de l'état 0. Or, r est un état absorbant et l'on est dans le cas régulier. Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème 2.

Les relations (4) montrent que les $z_j = s_{oj}$ ($j = 0, 1, \ldots, r$) sont les solutions uniques du système linéaire :

$$\begin{cases} z_j - P_{oj} - \pi_j) = \sum_{l=o}^{r} z_l \; P_{lj} & j = 0, 1 \ldots, r \\ \sum_{l=o}^{r} z_l = 0 & \end{cases} \qquad (4')$$

En substituant les valeurs ci-dessus pour P_{oj} et π_j il vient

$$\begin{cases} z_o = 0 & \\ z_1 - 1 = z_1 \; P_{11} = \frac{z_1}{r} \quad \Longrightarrow & z_1 = \frac{r}{r-1} \\ z_j = z_{j-1} \; P_{j-1,j} + z_j \; P_{jj} & j = 2, \ldots, r-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_o = 0 & \\ z_1 = \frac{r}{r-1} & \\ \frac{r-j}{r} \, z_j = \frac{r-j+1}{r} \; z_{j-1} & j = 2, \ldots, r-1 \end{cases}$$

d'où $$z_o = 0, \; z_1 = \frac{r}{r-1}, \; z_2 = \frac{r}{r-2}, \; \ldots, \; z_{r-1} = \frac{r}{r-(r-1)} = r.$$

La dernière relation de (4') donne alors :

$$z_r = - \left[z_o + z_1 + \ldots + x_{r-1} \right] = - r \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r-1} \right]$$

d'où $$M_{or} = -z_r + 1 = r \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{r} \right]$$

On trouve de la même façon :

$$\begin{cases} M_{ir} = r \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r-i} \right] & i = 0, 1, \ldots, r-1. \\ M_{rr} = 1 & \end{cases}$$

IMP. LOUIS-JEAN — GAP

Dépôt légal n° 160 — 1958